G. Törner

Journal of Geometry. Vol. 5/1 1974. Birkhäuser Verlag Basel

ÜBER HOMOMORPHISMEN PROJEKTIVER HJELMSLEV-EBENEN

Günter Törner

The main result of this paper is a representation theorem for incidence morphisms of desarguesian Hjelmslev planes which preserve basis quadrangles. We prove that each geometric morphism between desarguesian Hjelmslev planes $\mathcal{H}(R)$, $\mathcal{H}(S)$ induces a total order of the coordinate ring R and a partial homomorphism from R to S. Conversely we have for each partial homomorphism and every partial order a uniquely determined geometric morphism. By a total order A of a ring R we mean a subring of R such that the elements of $R \setminus A$ are units in R, with inverses lying in A. If we have such a total order $A \subsetneq R$, a partial homomorphism from R to another ring S is essentially a homomorphism from A to S.

Homomorphismen projektiver desarguesscher Ebenen lassen sich analytisch durch Stellen der zugehörigen Koordinatenkörper beschreiben (siehe André [2], Radó [11]). In einer Arbeit von Garner [4] wird dieser Zusammenhang als Äquivalenz der Kategorie der Körper mit Stellen als Morphismen und der Kategorie der projektiven Pappus-Ebenen und geeigneten Homomorphismen interpretiert.

Das Ziel dieser Note ist die Ausdehnung obiger Resultate und ihre Verallgemeinerung auf projektive desarguessche Hjelmslev-Ebenen. Projektive Hjelmslev-Ebenen (H-Ebenen) sind im wesentlichen projektive Inzidenzstrukturen, in denen die Eindeutigkeit von Verbindungsgeraden zweier Punkte bzw. des Schnittpunktes zweier Geraden nicht verlangt wird. Dabei beschränken wir uns auf desarguessche Ebenen, das sind solche, die ein analytisches Modell über einem Hjelmslev-Ring besitzen.

In § 1 modifizieren wir Begriffe von Radó [11] und beweisen einige Hilfssätze. Eine wesentliche Rolle spielt der Begriff einer totalen Ordnung A eines Ringes R. Es handelt sich dabei um einen Unterring A, wobei die Elemente aus $R \setminus A$ Einheiten in R sind und ihre Inversen in A liegen. Ist $A \subseteq R$ eine totale Ordnung, so ist ein partieller Homomorphismus im wesentlichen ein Ringhomomorphismus von A in einen anderen Ring S.

Hauptergebnis dieser Arbeit ist folgender Darstellungssatz für inzidenzerhaltende Punktabbildungen von H-Ebenen, die Basisvierecke respektieren: Es wird bewiesen, daß jeder solche geometrische Morphismus zwischen desarguesschen H-Ebenen $\mathcal{H}$ (R), $\mathcal{H}$ (S) eine totale Ordnung in R und einen partiellen Homomorphismus von R in S induziert. Umgekehrt gehört zu jedem partiellen Homomorphismus und jeder totalen Ordnung ein geometrischer Morphismus (§ 2). Ohne stark einschränkende Zusatzvoraussetzungen an die geometrischen Morphismen - z. B. Nachbarschaftsbereiche der Basispunkte sollen respektiert werden - ist es unmöglich, den Darstellungssatz als Äquivalenz geeigneter Kategorien zu interpretieren (§ 3).

§ 0.

<u>0.1 DEFINITION. Eine Inzidenzstruktur $\mathcal{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, I)$ heißt eine projektive Hjelmslev-Ebene, kurz H-Ebene, wenn $\mathcal{H}$ folgende drei Axiome erfüllt [7, Def.0]</u>:

(1) $\forall\, P,Q \in \mathcal{P}\ \exists\ g \in \mathcal{G}: P,QIg$

(2) $\forall\, g,h \in \mathcal{G}\ \exists\ P \in \mathcal{P}: PIg,h$

<u>Zwei Punkte P, Q heißen benachbart, in Zeichen $P \circ Q$, wenn es zwei verschiedene Geraden g, h mit P,QIg,h gibt. Dual dazu ist $g \circ h$ definiert.</u>

(3) <u>Es gibt eine gewöhnliche projektive Ebene $\mathfrak{P}$ und einen Epimorphismus $\alpha: \mathcal{H} \to \mathfrak{P}$ mit</u>

$$\alpha P = \alpha Q \iff P \circ Q, \qquad \alpha g = \alpha h \iff g \circ h.$$

Im folgenden werden wir nur desarguessche H-Ebenen betrachten. Das sind solche, die ein analytisches Modell über einem Hjelmslev-Ring besitzen.

0.2 DEFINITION. Ein (nicht notwendig kommutativer) Ring R mit Einselement 1, $0 \neq 1$, heißt Hjelmslev-Ring, kurz H-Ring, falls R folgenden Bedingungen genügt [7, S.107]:

(1) Jeder Nullteiler aus R ist zweiseitiger Nullteiler, und die Menge N der Nullteiler ist ein zweiseitiges Ideal.

(2) Alle Elemente von $R \setminus N$ sind Einheiten.

(3) Aus $a, b \in N$ folgt ($a \in Rb$ oder $b \in Ra$) und ($a \in bR$ oder $b \in aR$).

Punkte (Geraden) entsprechen den links(rechts-)homogenen Tripeln, deren Elemente nicht alle Nullteiler sind. Ist P ein Punkt mit einer Darstellung (p_1, p_2, p_3) und g eine Gerade mit einer Darstellung (g_1, g_2, g_3), so wird die Inzidenz "PIg" durch $p_1g_1+p_2g_2+p_3g_3 = 0$ definiert.

Wir weisen noch auf folgende Vereinbarungen hin: die betrachteten Ringe sind nicht notwendig kommutativ, besitzen aber ein Einselement $1 \neq 0$. Lokale Ringe sind Ringe, in denen die Nichteinheiten ein Ideal bilden (Lambek [8,S.75]). Mit J(R) bezeichnen wir die Menge aller Nichteinheiten eines Ringes R, mit U(R) die Einheitengruppe und mit N(R) die Menge aller zweiseitigen Nullteiler.

§ 1.

1.1 DEFINITION. Ein Unterring A eines Ringes R heißt totale Ordnung von A in R, wenn $\forall x \in R \setminus A \; \exists y \in A: xy = yx = 1$.

BEMERKUNGEN. (1) $1 \in A$

(2) $J(R) \subseteq J(A)$ Trivial, da J Ringe sind. $x \in J(R) \Rightarrow x \in A$

Damit wird der Begriff des totalen Unterrings für Körper (Radó [11, S.309]) in naheliegender Weise verallgemeinert. Korollar 1.4 zeigt, daß für eine spezielle Klasse von Ringen totale Ordnungen Ordnungen im Sinne der Definition bei Behrens [3, S.260] sind.

1.2 DEFINITION. Ein Ring R heißt Links-(Rechts-)Kettenring, wenn die Links-(Rechts-)Ideale durch Inklusion linear geordnet sind.

Ferner setzen wir: $N_l(R) = \{t \in R \mid \exists\ s \neq 0: ts = 0\}$
$N_r(R) = \{t \in R \mid \exists\ s \neq 0: st = 0\}$

<u>1.3 LEMMA</u>. <u>Sei</u> A <u>totale Ordnung in</u> R, <u>dann gelten</u>:
(1) A <u>ist lokal</u> $\Leftrightarrow$ R <u>ist lokal</u>
(2) $N_l(R) = N_l(A)$ <u>und</u> $N_r(R) = N_r(A)$
(3) A <u>ist Links-Kettenring</u> $\Leftrightarrow$ R <u>ist Links-Kettenring</u>
(4) A <u>ist Rechts-Kettenring</u> $\Leftrightarrow$ R <u>ist Rechts-Kettenring</u>

Die Aussagen (2) - (4) verdanke ich V. Poneleit [10].
Beweis.(1) $\Rightarrow$. Sei A lokal und $x \in R$. Ist $x \in A$, so ist x oder 1-x Einheit. Ist dagegen $x \in R \setminus A$, so ist x Einheit. Mit [8, S.75] ist R ein lokaler Ring. $\Leftarrow$. Sei R lokal. Wir werden zeigen, daß J(A) ein Ideal von A ist. Zuerst sei $x,y \in U(A)$. Dann ist sicherlich $xy \in U(A)$. Sei nun $x \in J(A)$, $y \in U(A)$. Wäre $xy \in U(A)$, dann wäre wegen $y \in U(A)$ auch $x \in U(A)$, Widerspruch! Falls $x,y \in J(A)$ sind, können wir o.B.d.A. $x,y \in U(R)$ betrachten, da sonst mit $J(R) \subseteq J(A)$ und R lokal trivialerweise $xy \in J(A)$ ist. Wäre $xy \in U(A)$, so hätten wir $x \cdot y(xy)^{-1} = 1$ und wegen $x \in U(R)$ $x^{-1} = y \cdot (xy)^{-1} \in A$, also $x \in U(A)$. Widerspruch zu $x \in J(A)$. Entsprechend zeigt man: $x \in A$, $y \in J(A) \Longrightarrow xy \in J(A)$. Wir weisen nun nach: $x,y \in J(A) \Longrightarrow x+y \in J(A)$.
a) $x,y \in J(R) \cap J(A)$. Wegen R lokal und $J(R) \subseteq J(A)$ ist x+y Element von J(A).
b) $x \in J(R) \cap J(A)$, $y \in U(R) \cap J(A)$. Wäre $x+y \in U(A)$, so gibt es $v \in U(A)$ mit $(x+y)v = 1$, also $yv = 1-xv$. Mit $x \in J(R)$ und R lokal folgt $1-xv \in U(R)$. Sei also $(1-s)(1-xv) = (1-xv)(1-s) = 1$, so folgt $-xv-s+xvs = 0 \in A$. Da $x \in J(R) \cap J(A)$ und R lokal ist, haben wir $-s \in A$, also $1-xv = yv \in U(A)$ und damit $y = (yv)v^{-1} \in U(A)$, im Widerspruch zu $y \in J(A)$.
c) Ist $x,y \in U(R) \cap J(A)$, so gilt, da A totale Ordnung ist, $x^{-1}y \in A$ oder $y^{-1}x \in A$. Sei etwa $x^{-1}y \in A$.
$x+y = x(1+x^{-1}y) \in J(A) \cdot (1+A) \subseteq J(A)$. Damit ist A als lokaler Unterring nachgewiesen.
(2) Da A Unterring von R ist, ist sicherlich $N_l(A) \subseteq N_l(R)$, $N_r(A) \subseteq N_r(R)$. Andererseits sind alle $x \in R \setminus A$ Einheiten in R,

also $N_l(R) \subseteq N_l(A)$, $N_r(R) \subseteq N_r(A)$. Damit gilt (2).
(3) Ist R ein Links-Kettenring, dann ist A als totale Ordnung offensichtlich ein Links-Kettenring. Ist umgekehrt A ein Links-Kettenring, so gilt für $r \in R$, $s \in R \setminus A$ $r = (rs^{-1})s$. Damit ist R ein Links-Kettenring.
Entsprechend verläuft der Nachweis von (4).

Wir stellen der Vollständigkeit halber die Beziehung zur Definition von Behrens her.

1.4 KOROLLAR. Sei R ein Ring, dessen Nichtnullteiler Einheiten sind. Ist A totale Ordnung in R, dann ist A Ordnung [3, S.260] in R.

Beweis. Es muß gezeigt werden: a) Jeder Nichtnullteiler von A ist Einheit in R. Das ist klar, da mit Lemma 1.3 aus $a \notin N_l(A) \cup N_r(A)$ folgt: $a \notin N_l(R) \cup N_r(R)$, also $a \in U(R)$.
b) Jedes Element von R hat die Form $a_1^{-1}b_1$ bzw. $b_2a_2^{-1}$, wobei a_1, a_2 Nichtnullteiler in A sind. Ist $x \in R \setminus A$, so ist x^{-1} Nichtnullteiler in A, also $x = (x^{-1})^{-1}$.

In Verallgemeinerung des Konzepts von Radó [11, S.310] definieren wir:

1.5 DEFINITION. Sei A totale Ordnung in R und S ein Ring. φ heißt partieller Homomorphismus von R nach S bzgl. A, wenn (1) $\varphi: A \longrightarrow S$ ist ein Ringmorphismus,
(2) $\forall x \in U(R)$: $x^{-1} \notin A \implies x \in J(S)$ und
(3) φ ist nicht der Nullmorphismus.

Sind R, S Körper und ist A ein totaler Unterring im Sinne von Radó [11], so sind die partiellen Homomorphismen gerade die Stellen von R [14, S.3].

1.6 LEMMA. Sei A totale Ordnung eines Ringes und $x_1, \ldots, x_n$ Elemente aus R, die nicht alle in J(R) liegen. Dann gibt es $r \in R$, so daß $rx_1, \ldots, rx_n \in A$, wobei nicht alle Elemente $rx_1, \ldots rx_n$ in J(A) sind.

Beweis. Sind Elemente $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ in J(R), so liegt auch jedes Produkt rx_{i_j} in J(R) und wegen $J(R) \subseteq J(A)$ auch in J(A). Daher betrachten wir nur solche Elemente, die nicht in J(R) liegen und führen den Beweis mit vollständiger Induktion über deren Anzahl. $n = 1$: $x_1 \notin J(R)$, dann ist $x_1^{-1}x_1 = 1$ und $1 \in A \setminus J(A)$, setze also $r = x_1^{-1}$. Gibt es nun r mit $rx_1, \ldots rx_k \in A$ und ein j, so daß $rx_j \in A \setminus J(A)$, so betrachten wir rx_{k+1}. Ist $rx_{k+1} \in A$, so sind wir fertig. Im anderen Fall folgt $rx_{k+1} \in U(R)$ aus $rx_{k+1} \notin A$, also $(rx_{k+1})^{-1} = x_{k+1}^{-1}r^{-1}$ Element von A. Nun ist $x_{k+1}^{-1}r^{-1}rx_i = x_{k+1}^{-1}x_i \in A$, ferner $x_{k+1}^{-1}x_{k+1} = 1 \in A \setminus J(A)$. Daher setzen wir $r = x_{k+1}^{-1}$.

Die Auswahl von r ist im allgemeinen nicht eindeutig. Erfüllen r_1, r_2 die Bedingungen von Lemma 1.6 in bezug auf A, so ist $r_1r_2^{-1} \in U(A)$, denn sei $r_2x_i \in A \setminus J(A)$, also $r_2x_i \in U(A)$, dann ist $r_1x_i = r_1r_2^{-1}r_2x_i \in A$, was $r_1r_2^{-1} \in A$ zur Folge hat. Umgekehrt gilt:

$$r_1r_2^{-1} \in U(A) \Rightarrow (r_1x_1, \ldots, r_1x_n \in A \text{ und } \exists\, i: r_1x_i \in U(A)$$
$$\Leftrightarrow r_2x_1, \ldots, r_2x_n \in A \text{ und } \exists\, j: r_2x_j \in U(A)).$$

§ 2.

Wir wenden uns nun der geometrischen Interpretation der in § 1 eingeführten Begriffe zu.

2.1 DEFINITION. Unter einer Hjelmslev-Ebene $(\mathcal{H}, \mathfrak{B})$ mit Basisviereck verstehen wir eine projektive H-Ebene mit einem Quadrupel von Punkten $\mathfrak{B} = (P_1, P_2, P_3, E)$ mit der Eigenschaft: $P_1P_2P_3E$ ist ein nicht ausgeartetes Viereck [6, A.3].

2.2 DEFINITION. Unter einem basiserhaltenden H-Morphismus zweier H-Ebenen $(\mathcal{H}, \mathfrak{B})$, $(\mathcal{H}', \mathfrak{B}')$ verstehen wir eine Punktabbildung f mit folgenden Eigenschaften:

(1) $f: \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ ist inzidenzerhaltend.

(2) Sind (P_1, P_2, P_3, E) bzw. (P_1', P_2', P_3', E') die Basisvierecke von $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}'$, so gilt: $fP_i = P_i'$ $(i = 1,2,3)$ und $fE = E'$ und schreiben unter diesen Bedingungen $f: (\mathcal{H}, \mathfrak{B}) \to (\mathcal{H}', \mathfrak{B}')$.

Für projektive Ebenen bilden nun die Objekte (2.1) zusammen mit den Morphismen (2.2) eine Kategorie. Garner [4] wies für projektive Pappus-Ebenen die Äquivalenz mit einer speziellen Kategorie von Ringen nach. In unserem Fall wirft allerdings eine ringtheoretische Beschreibung der basiserhaltenden H-Morphismen erhebliche Schwierigkeiten auf. Das läßt sich geometrisch dadurch verstehen, weil zunächst noch nicht ausgeschlossen ist, daß zu einem Viereckspunkt benachbarte Punkte unter einem basiserhaltenden H-Morphismus in den Nachbarschaftsbereich eines anderen Basispunktes abgebildet werden können. Um dies zu verhindern, setzen wir:

2.3 DEFINITION. Ein basiserhaltender H-Morphismus f heißt regulärer H-Morphismus, wenn gilt:
$P_i, P_j \in \{P_1, P_2, P_3\}$ und $X \circ P_i$ und $fX \circ fP_j \Rightarrow i = j$.

Wie schon oben erwähnt betrachten wir im folgenden nur desarguessche H-Ebenen. Nehmen wir als Bezugssystem für die Koordinatisierung das Basisviereck (P_1, P_2, P_3, E), so haben die Punkte die Darstellungen $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$ und es gibt bis auf Isomorphie genau einen H-Ring R, so daß $\mathcal{H} = \mathcal{H}(R)$ ist. $\mathcal{H}(R)$ ist das oben erwähnte analytische Modell (vgl.[7]). Da desarguessche H-Ebenen viereckstransitiv sind , können wir uns im folgenden auf H-Ebenen $\mathcal{H}(R)$ mit der natürlichen Basis $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$ beschränken.

Sei A totale Ordnung in R. Wir sagen: (x_1, x_2, x_3) ist eine A-Darstellung des Punktes X (der Geraden x), wenn $x_1, x_2, x_3 \in A$ gilt. Mit Lemma 1.6 hat jeder Punkt von $\mathcal{H}(R)$ eine A-Darstellung. Das ermöglicht uns, den folgenden Satz zu beweisen:

2.4 SATZ. Seien R, S H-Ringe, A totale Ordnung von R und φ ein partieller Homomorphismus von R nach S. Dann wird durch $f(\varphi)X = (\varphi x_1, \varphi x_2, \varphi x_3)$, wobei (x_1, x_2, x_3) A-Darstellung von X ist, ein regulärer H-Morphismus $f(\varphi)\colon (\mathcal{H}(R), \mathcal{B}) \longrightarrow (\mathcal{H}(S), \mathcal{B}')$ definiert.

Beweis. Seien (x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3') A-Darstellungen von X, so gibt es $r \in U(A)$ mit $x_i = r x_i'$. Da φ Ringmorphismus ist, ist φr Einheit in S, also sind $(\varphi x_1, \varphi x_2, \varphi x_3)$ bzw. $(\varphi x_1', \varphi x_2', \varphi x_3')$ Darstellungen desselben Punktes.
Seien X_j $(j = 1,2,3)$ kollineare Punkte, wobei (x_{1j}, x_{2j}, x_{3j}) A-Darstellungen von X_j seien, so gibt es eine Gerade g mit einer A-Darstellung (g_1, g_2, g_3) und $x_{1j}g_1 + x_{2j}g_2 + x_{3j}g_3 = 0$.

Nun gilt: $\varphi x_{1j}\varphi g_1+\varphi x_{2j}\varphi g_2+\varphi x_{3j}\varphi g_3 = 0$, also gibt es in $\mathcal{H}(S)$ eine Gerade, die mit $f(\varphi)X_j$ $(j = 1,2,3)$ inzidiert. Ferner ist offensichtlich $f(\varphi)(1,0,0) = (1,0,0)$, $f(\varphi)(0,1,0) = (0,1,0)$, $f(\varphi)(0,0,1) = (0,0,1)$ und $f(\varphi)(1,1,1) = (1,1,1)$. Ist etwa $(x_1,x_2,x_3) \circ (1,0,0)$, so ist $x_1 \in U(A)$, $x_2,x_3 \in J(R)$. Näheres siehe Klingenberg [7, S.107/108]. Daher ist $\varphi x_1 \in U(S)$, also $(\varphi x_1, \varphi x_2, \varphi x_3)$ zu $(0,1,0)$ bzw. $(0,0,1)$ nicht benachbart. Damit ist $f(\varphi)$ als regulärer H-Morphismus nachgewiesen.

<u>2.5 SATZ. Ist</u> $f\colon (\mathcal{H}(R),\mathcal{B}) \to (\mathcal{H}(S),\mathcal{B}')$ <u>ein regulärer H-Morphismus, dann gibt es genau eine totale Ordnung</u> A <u>in</u> R <u>und einen partiellen Homomorphismus</u> $\varphi_f\colon A \to S$, <u>so daß</u> $f(\varphi_f) = f$ <u>ist</u>.

Beweis. Wegen $f(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$ ist für $i,j,k \in \{0,1\}$ sicher $f(i,j,k) = (i,j,k)$. Wir betrachten

$$A = \{a \in R \mid f(1,a,0) \not\circ (0,1,0)\}.$$

Da f regulärer(!) H-Morphismus ist, haben wir $J(R) \subseteq A$, denn $a \in J(R) \Rightarrow (1,a,0) \circ (1,0,0)$, d.h. $f(1,a,0) \not\circ (0,1,0)$, also $a \in A$. Wir zeigen nun: A ist totale Ordnung.

a) $a \in A \Rightarrow -a \in A$

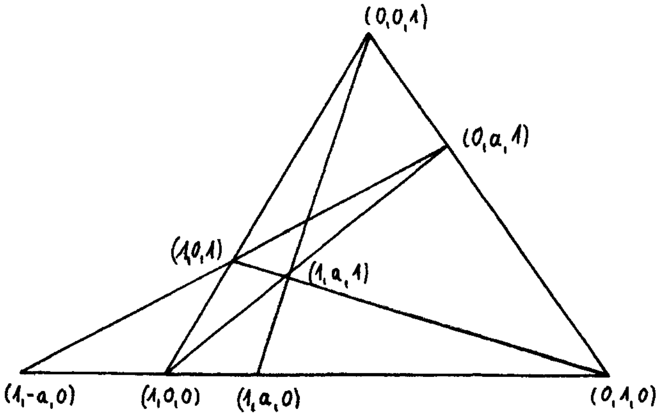

Fig. 1

$a \in A$: $f(1,a,0) \not\circ (0,1,0)$, also $f(1,a,1) \not\circ (0,1,0)$, daher auch
$f(0,a,1) \not\circ (0,1,0)$. Deshalb ist $f(0,a,1)f(1,0,1)$ zu $f(0,1,0)f(0,0,1)$ nicht benachbart, also $f(1,-a,0) \not\circ (0,1,0)$. Ähnlich zeigt man nun: b) $a,b \in A \Rightarrow a+b \in A$ (Fig.2) und c) $a,b \in A \Rightarrow ab \in A$ (Fig.3).

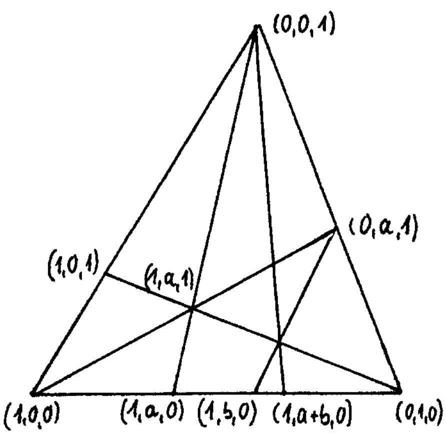

Fig. 2

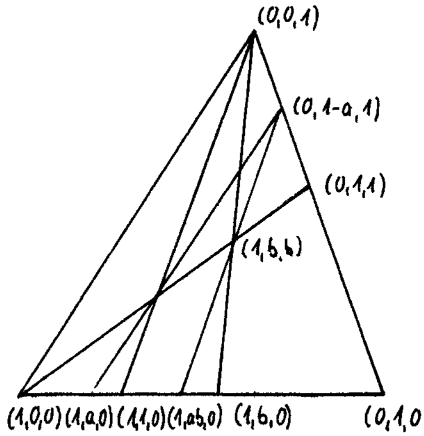

Fig. 3

d) Wegen $f(1,1,0) = (1,1,0) \emptyset (0,1,0)$ ist $1 \in A$.
Aus a)-d) folgt: A ist Unterring von R.
e) $\forall a \in U(R): a \notin A \Longrightarrow a^{-1} \in A$

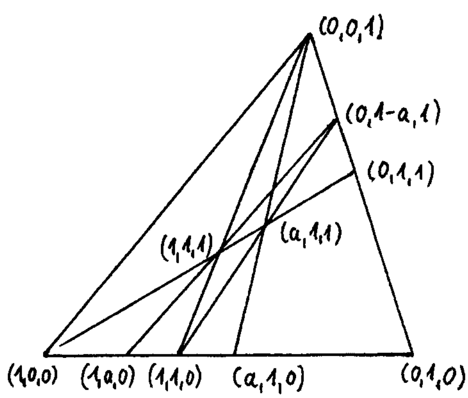

Fig. 4

Ist $a \notin A$, so gilt $f(1,a,0) \circ (0,1,0)$, also $f(0,1-a,1) \circ (0,1,0)$. $f(0,1-a,1)f(1,1,0)$ ist benachbart zu $f(0,1,0)f(1,1,0)$. Somit ist $f(a,1,1) \circ f(1,0,0)$ und daher, weil $a \in U(R)$, $f(a,1,0) = f(1,a^{-1},0)$ benachbart zu $f(1,0,0)$, also insbesondere $f(1,a^{-1},0) \emptyset f(0,1,0)$.

Damit ist A als totale Ordnung in R nachgewiesen. Nach Konstruktion wird durch $f(1,a,0) = (1,a',0)$ mit $a \mapsto a'$ ein Ringmorphismus $\varphi_f: A \to S$ definiert. Aus e) erkennen wir, daß $a \in U(R)$ und $a \notin A \Longrightarrow a^{-1} \in J(S)$. Ähnlich wie in e) weist man nach, daß $f(\varphi_f) = f$ ist.

Seien A, A' totale Ordnungen in R und φ_f, φ'_f partielle Homomorphismen mit $f(\varphi_f) = f(\varphi'_f) = f$. Ist $x \in A$, $x \notin A'$, so ist $x^{-1} \in A$. Sei $(1,x,0)$ A-Darstellung eines Punktes X, $f(1,x,0) = (1, \varphi_f x, 0) \not\circ (0,1,0)$. Ist $(x^{-1},1,0)$ A'-Darstellung des gleichen Punktes X, so ist wegen $\varphi'_f x^{-1} \in J(S)$ $f(x^{-1},1,0) = (\varphi'_f x^{-1},1,0) \circ (0,1,0)$. Widerspruch! Daher gilt $A \subseteq A'$ und aus Symmetriegründen $A = A'$. Demzufolge ist $\varphi_f = \varphi'_f$.

Fassen wir Satz 2.4 und 2.5 zusammen, so erhalten wir einen Darstellungssatz für reguläre H-Morphismen von desarguesschen H-Ebenen.

2.6 DARSTELLUNGSSATZ. Sei $f: (\mathcal{H}(R), \mathfrak{B}) \to (\mathcal{H}(S), \mathfrak{B}')$ ein regulärer H-Morphismus von desarguesschen H-Ebenen. Dann gibt es genau eine totale Ordnung in R und genau einen partiellen Homomorphismus, der f induziert. Umgekehrt definiert jede totale Ordnung in R und jeder partielle Homomorphismus von R nach S einen regulären H-Morphismus.

§ 3.

In diesem Abschnitt werden wir noch kurz auf die oben erwähnten Schwierigkeiten eingehen, den Darstellungssatz als Äquivalenz geeigneter geometrischer bzw. algebraischer Kategorien zu formulieren. Die Schwierigkeit liegt darin begründet, daß die Verkettung von regulären H-Morphismen nicht unbedingt eine Abbildung gleicher Art ist, d.h. nicht regulär ist. Das werden wir dadurch belegen, daß wir partielle Homomorphismen von H-Ringen betrachten, deren Verkettung kein partieller Homomorphismus ist.

Sei K ein kommutativer Körper; mit einer linear geordneten Halbgruppe Γ konstruieren wir nach der Methode von B.H. Neumann [9] den verallgemeinerten Halbgruppenring $K(\Gamma)$ (vgl. [11, S.315/316]. Wir wählen Γ wie folgt

$$\Gamma = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in \{0,1\}, \text{ wobei } \alpha = 0 \Rightarrow \beta \in \mathbb{N}_0 \text{ und } \alpha = 1 \Rightarrow \beta \in -\mathbb{N}_0\}.$$

Γ ist bzgl. der lexikographischen Ordnung linear geordnet und mit

$$(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) = \begin{cases} (\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2), \text{ falls } (\alpha_1+\alpha_2, \beta_1+\beta_2) \leq (1,-1) \\ (1,0) \text{ sonst} \end{cases}$$

ist Γ linear geordnete Halbgruppe. Dann ist der verallgemeinerte Halbgruppenring $K(\Gamma)$ die Menge aller Abbildungen $r: \Gamma \to K$, wobei der Träger $\{\alpha \mid r(\alpha) \neq 0\}$ wohlgeordnet in Γ ist. Es stellt sich heraus, daß $K(\Gamma)$ ein kommutativer H-Ring mit zwei Primidealen N, P, $P \subsetneqq N$ ist. Dabei ist
$N = \{r \mid \min\{\alpha \mid r(\alpha) \neq 0\} \geqslant (0,1)\}$,
$P = \{r \mid \min\{\alpha \mid r(\alpha) \neq 0\} \geqslant (0,k)$ für alle $k \in \mathbb{N}\}$. Nun definiert die Projektion $\varphi_1 : K(\Gamma) \longrightarrow K(\Gamma)/P$ einen partiellen Homomorphismus der totalen Ordnung $K(\Gamma)$ in $K(\Gamma)$. $K(\Gamma)/P$ ist ein Bewertungsring vom Range 1. Unter φ_1 werden alle Nullteiler, die nicht in P liegen, zu Nichtnullteilern in $K(\Gamma)/P = S_1$, d.h. zu Einheiten des Quotientenkörpers $Q(S_1)$. Die Menge aller Bewertungen eines Körpers L ist eine geordnete Menge, sofern man äquivalente Bewertungen identifiziert und für Bewertungen v_1, v_2 setzt:
[12, S.54ff] $v_1 \leqslant v_2 \iff A_{v_1} \supseteq A_{v_2}$. Dabei sind A_{v_1} bzw. A_{v_2} die zu den Bewertungen v_1, v_2 gehörigen Bewertungsringen. Andererseits gilt, wenn J_1 bzw. J_2 das maximale Ideal von A_{v_1} bzw. A_{v_2} ist: (Gilmer [5, S.182] $v_1 \leq v_2 \iff J_1 \subseteq J_2$.
Wir wählen nun K so, daß der Quotientenkörper $Q(S_1)$ nicht äquivalente Bewertungen vom Range 1 besitzt, die notwendigerweise unabhängig sind [12, S.59]. Dann existiert außer S_1 ein Bewertungsring S_2 von $Q(S_1)$, so daß weder $S_1 \subseteq S_2$ noch $S_2 \subseteq S_1$ richtig ist. Daher gibt es ein Element r aus $N(K(\Gamma))$ mit $\varphi_1 r \in J(S_1)$ und nicht $\varphi_1 r \in S_2$. Als Bewertungsring ist S_2 totale Ordnung in $Q(S_1)$, also $(\varphi_1 r)^{-1} \in S_2$.
Sei I das von $(\varphi_1 r)^{-1}$ erzeugte Ideal in S_2, so definiert die Projektion $\varphi_2 : S_2 \to S_2/I$ einen partiellen Homomorphismus, wobei das epimorphe Bild S_2/I H-Ring ist [13]. Ferner gilt $\varphi_2(J(S_2)) = N(S_2/I)$. Wenden wir dieses Ergebnis auf die geometrische Situation an, so erkennen wir folgendes:
Es gibt einen Punkt, nämlich $(1,r,0) \circ (1,0,0)$, der unter $f(\varphi_1)$ nach $(1, \varphi_1 r, 0)$ abgebildet wird.

$(1,0,0) \circ (1,r,0) \qquad (1,r,0) \xmapsto{f(\varphi_1)} (1, \varphi_1 r, 0)$

$((\varphi_1 r)^{-1},1,0)$ ist eine S_2-Darstellung des Punktes $(1,\varphi_1 r,0)$. Das Bild unter $f(\varphi_2)$ ist $(0,1,0)$.

$$((\varphi_1 r)^{-1},1,0) \xmapsto[f(\varphi_2)]{} (0,1,0)$$

Damit wurde gezeigt, daß die Verkettung von regulären H-Morphismen im allgemeinen keinen regulären H-Morphismus erbringt.

LITERATUR

1. ARTMANN,B.: Desarguessche Hjelmslev-Ebenen n-ter Stufe. Mitt. Math. Sem. Giessen 91 (1971), 1-19
2. ANDRE,J.: Über Homomorphismen projektiver Ebenen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 34 (1969), 98-114
3. BEHRENS,E.A.: Ring Theory. Academic Press, New York 1972
4. GARNER,L.: Fields and Projective Planes: a Category Equivalence. Rocky Mountain J. Math. 2 (1972), 605-610
5. GILMER,R.: Multiplicative Ideal Theory, Part I. Queen s University Kingston, Ontario 1968
6. KLINGENBERG,W.: Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. Math. Z. 60 (1954), 384-406
7. KLINGENBERG,W.: Desarguessche Ebenen mit Nachbarelementen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 20 (1955), 97-111
8. LAMBEK,J.: Lectures on Rings and Modules. Blaisdell Publishing Company, Waltham Massachusetts 1966
9. NEUMANN,B.H.: On Ordered Division Rings. Trans. Amer. Math. Soc. 66 (1949), 202-252
10. PONELEIT,V.: Quasibewertungen und Morphismen von desarguesschen projektiven Hjelmslev-Ebenen Diplomarbeit, Math. Institut Giessen, 1973
11. RADO,F.: Non-Injective Collineations on Some Sets in Desarguesian Projective Planes and Extension of Non-Commutative Valuations. Aequationes Math. 4 (1970), 307-321
12. RIBENBOIM,P.: Theorie Des Valuations. Les Presses de'l Université de Montreal, Montreal 1964
13. TÖRNER,G.: Hjelmslev-Ringe und die Geometrie der Nachbarschaftsbereiche in den zugehörigen Ebenen Diplomarbeit, Math. Institut Giessen, 1972

14. ZARISKI,O; SAMUEL,P.: Commutative Algebra Vol.II.
Van Nostrand Company, Princeton New Jersey

Günter Törner
Mathematisches Institut
Justus Liebig-Universität
63 Giessen
Arndtstraße 2

(Eingegangen am 10. August 1973)