Math. Z. 141, 159–167 (1975)


# Homomorphismen von affinen Hjelmslev-Ebenen

Günter Törner

Eng mit der Untersuchung einer mathematischen Struktur verknüpft ist die Frage nach den Eigenschaften zugehöriger strukturverträglicher Abbildungen. Nicht immer ist deren Definition schon kanonisch.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns mit strukturverträglichen Abbildungen von affinen Hjelmslev-Ebenen ($AH$-Ebenen). Es handelt sich dabei um verallgemeinerte affine Inzidenzstrukturen, in denen zwei Punkte unter Umständen mit mehr als einer Geraden inzidieren. Eine dadurch erklärte Nachbarschaftsrelation ist Äquivalenzrelation und die zugehörige Faktorstruktur affine Ebene.

Von Artmann [1], Bacon [2], Lorimer [7] u.a. wurden für $AH$-Ebenen verschiedene Morphismenbegriffe diskutiert, die sich im wesentlichen hinsichtlich ihres Verhaltens bzgl. der Nachbarschaftsrelation unterscheiden. So kann das Respektieren von entfernten Punkten als auch benachbarten Punkten oder auch beides als strukturverträglich angesehen werden.

Im ersten Kapitel werden wir zeigen, daß $AH$-Ebenen im wesentlichen – d.h. unter einer Zusatzbedingung, die bei einer algebraischen Beschreibung des Homomorphismus unabdingbar scheint – einen Typ von Inzidenzmorphismen zulassen: *ferntreue* Morphismen, welche nichtbenachbarte Punkte in zueinander nichtbenachbarte Punkte abbilden. Die von Artmann bzw. Bacon betrachteten Homomorphismen stellen sich als wichtige Spezialfälle heraus. Damit wird ein wesentlicher Unterschied zum projektiven Fall deutlich, den wir in [9] abgehandelt haben.

Das zweite Kapitel dient der Untersuchung der „Kerne" bzw. der durch die „Kerne" induzierten *Kongruenzrelationen* von ferntreuen Morphismen. Kongruenzrelationen sind durch die Äquivalenzklasse eines Punktes festgelegt (2.5). Der Verband der Kongruenzrelationen einer $AH$-Ebene ist eine Kette (2.6), weswegen zwischen verschiedenen epimorphen Bildern einer $AH$-Ebene stets wieder ein Epimorphismus existiert (2.10)!

Herrn Prof. Drake danke ich für wertvolle Hinweise bei der Abfassung der Arbeit.

## 1. Strukturverträgliche Abbildungen von $AH$-Ebenen

Im ersten Kapitel werden wir zeigen, daß wir uns bei der Betrachtung von strukturverträglichen Abbildungen affiner Hjelmslev-Ebenen im wesentlichen auf einen Typ beschränken können.

Bezüglich Begriffen wie Inzidenzstruktur und Inzidenzmorphismen verweisen wir auf [4].

**1.1. Definition** [8]. Eine *affine Hjelmslev-Ebene* $\mathscr{H}=(\mathscr{P},\mathscr{G},\mathrm{I})$, kurz $AH$-Ebene, ist eine Inzidenzstruktur mit einer Äquivalenzrelation $\|$, für die folgende Axiome gelten:

(A 1) Zu zwei Punkten $P$ und $Q$ gibt es stets eine Gerade $g$ mit $P, Q \mathrm{I} g$.

(A 2) Zu $P$ und $g$ gibt es genau ein $h$ mit $h \| g$ und $P \mathrm{I} h$.

Zwei Punkte $P, Q$ von $\mathscr{H}$ heißen benachbart, in Zeichen $P \sim Q$, wenn es zwei verschiedene Geraden $g, h$ von $\mathscr{H}$ mit $P, Q \mathrm{I} g, h$ gibt. Zwei Geraden $g, h$ von $\mathscr{H}$ heißen benachbart, in Zeichen $g \sim h$, wenn es zu jedem $P \mathrm{I} g$ ein $Q \mathrm{I} h$ mit $P \sim Q$ und zu jedem $P \mathrm{I} h$ ein $Q \mathrm{I} g$ mit $P \sim Q$ gibt. Die Negation von $P \sim Q$ $(g \sim h)$ bezeichnen wir mit $P \nsim Q$ $(g \nsim h)$.

(A 3) Ist $P \mathrm{I} g, h$, so ist $g \nsim h$ genau dann, wenn $P$ der einzige mit $g$ und $h$ inzidierende Punkt ist.

(A 4) Es gibt einen surjektiven Inzidenzmorphismus $\pi\colon \mathscr{H} \to \bar{\mathscr{H}}$ auf eine affine Ebene $\bar{\mathscr{H}}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\pi P = \pi Q \Leftrightarrow P \sim Q$,

(ii) $\pi g = \pi h \Leftrightarrow g \sim h$,

(iii) $|g \cap h| = 0 \Rightarrow \pi g \| \pi h$.

*Bemerkungen.* 1. Da in einer $AH$-Ebene neben der Inzidenzrelation auch eine Parallelitätsrelation und eine Nachbarschaftsrelation erklärt sind, müßten wir eigentlich korrekterweise $\mathscr{H}=(\mathscr{P},\mathscr{G},\mathrm{I},\|,\sim)$ schreiben.

2. Die in (A 4) angesprochene affine Ebene $\bar{\mathscr{H}}$ werden wir, da sie bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt ist, als das kanonisch homomorphe Bild von $\mathscr{H}$ ansprechen und mit $\pi$ im folgenden den zugehörigen Homomorphismus bezeichnen.

3. Mit $L(P, g)$ bezeichnen wir die Parallele zu $g$ durch $P$.

4. Nichtbenachbarte Geraden nennen wir auch kreuzend.

5. Wir setzen: $P \sim g \Leftrightarrow \exists\, Q \mathrm{I} g$ mit $P \sim Q$.

6. Elementare Eigenschaften von $AH$-Ebenen, die wir in den Beweisen meist unerwähnt lassen, findet man z.B. in [8].

**1.2. Definition** [7]. Unter einem *Hjelmslev-Morphismus*, kurz $AH$-Morphismus, $\varphi\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ der $AH$-Ebenen $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ verstehen wir eine Abbildung der Punkt- bzw. Geradenmenge von $\mathscr{H}_1$ in die von $\mathscr{H}_2$, die inzidenzerhaltend und parallelentreu ist, d.h.

$$P \mathrm{I} g \Rightarrow \varphi P \mathrm{I} \varphi g$$
$$g \| h \Rightarrow \varphi g \| \varphi h.$$

Ist $\varphi$ auf der Punkt- und Geradenmenge surjektiv, so nennen wir $\varphi$ einen $AH$-Epimorphismus.

Bacon fordert in [2, 2.23] zusätzlich noch die Nachbarschaftstreue von

$$P \sim Q \Rightarrow \varphi P \sim \varphi Q,$$

was für unsere Zwecke zunächst weniger geeignet erscheint. Dennoch bleiben einige wesentliche Eigenschaften der in [2] definierten Morphismen auch hier gültig.

**1.3. Lemma.** *Ist* $\varphi\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ *ein AH-Morphismus, so gilt:* $\varphi P \mathrm{I} \varphi g \Leftrightarrow \exists h$ *mit* $P \mathrm{I} h$ *und* $\varphi g = \varphi h$.

**1.4. Definition.** Ein Tripel $\delta = (P_1, P_2, P_3)$ von Punkten $P_i \in \mathscr{H}$ einer $AH$-Ebene $\mathscr{H}$ heißt *Basisdreieck*, falls $(\pi P_1, \pi P_2, \pi P_3)$ nicht-ausgeartetes Dreieck in $\bar{\mathscr{H}}$ ist.

Setzt man $P_4 = L(P_2, P_1 P_3) \cap L(P_3, P_1 P_2)$, so nennen wir $\Delta = (P_1, P_2, P_3, P_4)$ das vervollständigte Basisdreieck von $\delta$ oder kurz *Basisparallelogramm*. Jede dreielementige Teilmenge bildet als Tripel offensichtlich wieder ein Basisdreieck.

**1.5. Definition.** Ein $AH$-Morphismus $\varphi\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ heißt *nicht-entartet*, falls es in $\mathscr{H}_i$ Basisdreiecke $\delta_i$ gibt, so daß

$$\varphi[\delta_1] = \delta_2 \tag{1}$$

gilt.

Sind $\Delta_i$ die zugehörige Basisparallelogramme, so ist, falls $\varphi$ nicht-entartet ist, auch $\varphi[\Delta_1] = \Delta_2$.

Wir bemerken, daß es uns bei dem Begriff des nicht-entarteten $AH$-Morphismus nicht um die Auszeichnung von Basisdreiecken im Sinne von Basispunkten in der Kategoriensprache geht, sondern wir wollen lediglich durch die Existenz von Basisdreiecken mit (1) eine gewisse Reichhaltigkeit von $\varphi$ sicherstellen. Wenn wir im folgenden von den zu $\varphi$ gehörigen Basisdreiecken sprechen, meinen wir daher ein Paar von Basisdreiecken $\delta_i$, das (1) genügt.

**1.6. Lemma.** *Ist* $\varphi\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ *nicht-entarteter AH-Morphismus, so gilt:* $\varphi P \mathrm{I} \varphi g \Leftrightarrow \exists Q$ *mit* $Q \mathrm{I} g$ *und* $\varphi P = \varphi Q$.

*Beweis.* Wir zeigen $(\Rightarrow)$. Es seien $\Delta_1 = (P_1, \dots, P_4)$ bzw. $\Delta_2 = (\varphi P_1, \dots, \varphi P_4)$ zu $\varphi$ gehörige Basisparallelogramme. Ferner seien $h_i$ Geraden mit $P, P_i \mathrm{I} h_i$ $(i = 1, \dots, 4)$. Ist $h_i \sim h_j$, so gilt $h_i, h_j \sim P_i P_j$. Daher gibt es $k, l$, so daß $\varphi h_k \nsim \varphi h_l \nsim \varphi g \nsim \varphi h_k$ ist. Ist $h_k \cap g \neq \varnothing$ oder $h_l \cap g \neq \varnothing$, so wählen wir $Q \in h_k \cap g$ bzw. $Q \in h_l \cap g$ und $\varphi P = \varphi Q$ mit $Q \mathrm{I} g$. Es sei also $h_k \cap g = \varnothing = h_l \cap g$ angenommen. Dann ist $\pi_1 h_k \| \pi_1 g$, bzw. $\pi_1 h_l \| \pi_1 g$. Wegen $\pi_1 P \mathrm{I} \pi_1 h_l, \pi_1 h_k$ ist $\pi_1 h_k = \pi_1 h_l$, also $h_k \sim h_l$, d.h. $h_k, h_l \sim P_k P_l$. Daher existieren $i, j \in \{1, \dots, 4\} \setminus \{k, l\}$ mit $h_i \cap g \neq \varnothing$ und $h_j \cap g \neq \varnothing$. Kreuzt eine der Geraden $\varphi h_i, \varphi h_j$ die Gerade $\varphi g$, so sind wir fertig. Wegen $h_i \cap g \neq \varnothing$ und $h_j \cap g \neq \varnothing$ bleibt sonst lediglich der Fall $\varphi h_i, \varphi h_j \sim \varphi g$, also $\varphi g \sim \varphi P_i P_j$. Dann setze $Q = g \cap L(P, P_i P_k)$. Da $\varphi$ parallelentreu ist, gilt $\varphi L(P, P_i P_k) \| \varphi P_i P_k \nsim \varphi g$, d.h. $\varphi P = \varphi Q$.

**1.7. Definition.** Ein nicht-entarteter $AH$-Morphismus $\varphi\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ heißt *regulär*, wenn es zu $\varphi$ gehörige Basisdreiecke $\delta_1 = (P_1, P_2, P_3)$ bzw. $\delta_2 = (\varphi P_1, \varphi P_2, \varphi P_3)$ gibt, so daß für alle Punkte $X \in \mathscr{H}_1$ gilt:
$X \sim P_i$ und $\varphi X \sim \varphi P_j \Rightarrow i = j$ $(i, j \in \{1, 2, 3\})$.

**1.8. Lemma.** *Ist* $\varphi$ *regulärer AH-Morphismus bzgl. der Basisdreiecke* $\delta_i$ $(i = 1, 2)$ *und setzt man* $P_4 = L(P_2, P_1 P_3) \cap L(P_3, P_1 P_2)$, *so gilt:* $X \sim P_i$ *und* $\varphi X \sim \varphi P_j \Rightarrow i = j$ $(i, j \in \{1, 2, 3, 4\})$.

Mit Hilfe des Begriffs eines regulären $AH$-Morphismus können wir zeigen, daß hinreichend viele nicht benachbarte Geraden unter $\varphi$ wiederum in kreuzende Geraden abgebildet werden.

**1.9. Lemma.** *Es sei $\varphi$ regulärer AH-Morphismus bzgl. der Basisparallelogramme $\Delta_1=(P_1,\dots,P_4)$ und $\Delta_2=(\varphi P_1,\dots,\varphi P_4)$. Zu jedem Punkt $P$ gibt es Geraden $h_i, h_j, h_k$ mit $P, P_i \mathrm{I}\, h_i$, $P, P_j \mathrm{I}\, h_j$ und $P, P_k \mathrm{I}\, h_k$, die*

$$h_i \nsim h_j \nsim h_k \nsim h_i \quad \text{und} \quad \varphi h_i \nsim \varphi h_j \nsim \varphi h_k \nsim \varphi h_i \tag{2}$$

*genügen.*

*Beweis.* Wie schon oben erwähnt impliziert $h_i \sim h_j$ stets $h_i, h_j \sim P_i P_j$. Daher befindet sich unter den Geraden $h_1,\dots,h_4$ bzw. $\varphi h_1,\dots,\varphi h_4$ jeweils höchstens ein Paar (verschiedener) benachbarter Geraden. Sind $h_1,\dots,h_4$ oder $\varphi h_1,\dots,\varphi h_4$ paarweise kreuzend, so ist (2) offensichtlich gewährleistet. Sei also nun o.B.d.A. $h_1 \sim h_2$ angenommen. Also gilt $h_1, h_2 \sim P_1 P_2$ und somit $P \sim P_1 P_2$. Wegen der Regularität von $\varphi$ ist der Fall $\varphi h_3 \sim \varphi h_4$ auszuschließen, d.h. $h_3 \nsim h_4$ und $\varphi h_3 \nsim \varphi h_4$.

Neben $h_3, h_4$ wählen wir als dritte Gerade $h_i$ $(i=1,2)$ so, daß deren Bild $\varphi h_i$ weder zu $\varphi h_3$ noch zu $\varphi h_4$ benachbart ist.

Man erkennt ferner sogleich:

**1.10. Lemma.** *Ist $\varphi$ regulärer AH-Morphismus bzgl. der Basisparallelogramme $\Delta_1=(P_1,\dots,P_4)$ bzw. $\Delta_2=(\varphi P_1,\dots,\varphi P_4)$, so folgt aus $P_i \mathrm{I}\, g$, $g \sim P_i P_j$ und $\varphi g \sim \varphi P_i P_k$ stets $j=k$.*

Im folgenden benötigen wir eine Zusatzbedingung, die im kanonisch homomorphen Bild der *AH*-Ebene das Fano-Axiom in seiner schwachen Form nach sich zieht:

(F) *Die Diagonalen eines Basisparallelogramms schneiden sich.*

**1.11. Lemma.** *Es sei $\varphi$ regulärer AH-Morphismus bzgl. der Basisparallelogramme $\Delta_i$, die der Bedingung* (F) *genügen. Für jede Gerade $h_i$ mit $P_i \mathrm{I}\, h_i$ und jeden Punkt $X \mathrm{I}\, h_i$ gibt es einen Punkt $Z \mathrm{I}\, h_i$, so daß $Z \nsim X, P_i$ und $\varphi Z \nsim \varphi X, \varphi P_i$ gilt.*

*Beweis.* O.B.d.A. sei $h_i = h_1$ und $P_i = P_1$. Ist $P_1 P_4 \nsim h_1$, so setze $Z_1 = h_1 \cap L(P_2, P_1 P_4)$ und $Z_2 = h_2 \cap L(P_3, P_1 P_4)$. Man beachte, daß wegen (F) $L(P_2, P_1 P_4) \nsim L(P_3, P_1 P_4)$ gilt. Also ist $Z_1 \nsim Z_2$ und somit $Z_1, Z_2 \nsim P_1$, $\varphi Z_1, \varphi Z_2 \nsim P_1$. Ist o.B.d.A. $Z_1 \sim X$, so kann aufgrund der Regularität von $\varphi$ der Punkt $\varphi Z_2$ nicht zu $\varphi X$ benachbart sein. Gilt dagegen $P_1 P_4 \sim h_1$, so setzen wir $Z_1 = h_1 \cap P_2 P_3$ und $Z_2 = h_2 \cap L(P_4, P_2 P_3)$. Wiederum läßt sich, wie oben behauptet, ein geeignetes $Z \in \{Z_1, Z_2\}$ finden.

Mit Hilfe der Lemmas 1.9 – 1.11 werden wir imstande sein, reguläre *AH*-Morphismen durch ihr Verhalten bzgl. benachbarter bzw. nicht benachbarter Punkte beschreiben zu können. Zuvor stellen wir noch zwei weitere Begriffe bereit:

**1.12. Definition.** Ein *AH*-Morphismus $\varphi\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ heißt *nachbarschaftstreu (nahtreu)*, falls

$$\forall\, P, Q \in \mathscr{H}_1 : P \sim Q \Rightarrow \varphi P \sim \varphi Q,$$

*ferntreu*, falls

$$\forall\, P, Q \in \mathscr{H}_1 : P \nsim Q \Rightarrow \varphi P \nsim \varphi Q.$$

Offensichtlich gilt:

**1.13. Lemma.** a) *Jeder ferntreue AH-Morphismus ist regulär.*

b) *Jeder nahtreue, nicht-entartete AH-Morphismus ist regulär.*

Ferner erhalten wir für Epimorphismen folgende Charakterisierungen:

**1.14. Lemma.** *Seien* $\mathscr{H}_i$ *AH-Ebenen mit den kanonischen Projektionen* $\pi_i$: $\mathscr{H}_i \to \bar{\mathscr{H}}_i$ $(i=1,2)$ *und* $\varphi$: $\mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ *ein AH-Epimorphismus.*

a) $\varphi$ *ist ferntreu genau dann, wenn ein Epimorphismus* $\bar{\varphi}$: $\bar{\mathscr{H}}_2 \to \bar{\mathscr{H}}_1$ *der affinen Ebenen* $\bar{\mathscr{H}}_1$, $\bar{\mathscr{H}}_2$ *mit* $\pi_1 = \bar{\varphi} \circ \pi_2 \circ \varphi$ *existiert.*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathscr{H}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ \bar{\mathscr{H}}_1 & \bar{\mathscr{H}}_2 \arrow[l, "\bar{\varphi}"'] \end{tikzcd}$$

b) $\psi$ *ist nahtreu genau dann, wenn ein Epimorphismus* $\bar{\psi}$: $\bar{\mathscr{H}}_1 \to \bar{\mathscr{H}}_2$ *der affinen Ebenen* $\bar{\mathscr{H}}_1$, $\bar{\mathscr{H}}_2$ *mit* $\bar{\psi} \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \psi$ *existiert.*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}_1 \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \mathscr{H}_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ \bar{\mathscr{H}}_1 \arrow[r, "\bar{\psi}"] & \bar{\mathscr{H}}_2 \end{tikzcd}$$

*Beweis.* a) $(\Rightarrow)$ Offensichtlich vererbt sich die Eigenschaft der Ferntreue von $\varphi$ bzgl. der Punkte auch auf Geraden. Somit ist $\bar{\varphi}$: $\pi_2 \varphi P \mapsto \pi_1 P$ bzw. $\bar{\varphi}$: $\pi_2 \varphi g \mapsto \pi_1 g$ wohldefiniert und surjektiv. Wegen 1.6 ist $\bar{\varphi}$ inzidenzerhaltend. Ist $\pi_2 \varphi g \| \pi_2 \varphi h$ und o.B.d.A. $\pi_2 \varphi g \cap \pi_2 \varphi h = \varnothing$, so ist auch $\varphi g \cap \varphi h = \varnothing$ und damit $g \cap h = \varnothing$, also wegen A4 stets $\pi_1 g \| \pi_1 h$.

$(\Leftarrow)$ Sei $\varphi P \sim \varphi Q$, also $\pi_2 \varphi P = \pi_2 \varphi Q$ und daher $\pi_1 P = \pi_1 Q$. Mit A4 folgt $P \sim Q$, was die Ferntreue von $\varphi$ belegt. Entsprechend beweist man b).

**1.15. Satz.** *Es sei* $\varphi$: $\mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ *regulärer AH-Morphismus der AH-Ebenen* $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ *und es existiert ein Paar* $\varphi$ *zugeordneter Basisvierecke* $(P_1, \ldots, P_4)$ *bzw.* $(\varphi P_1, \ldots, \varphi P_4)$, *die der Bedingung* (F) *genügen. Dann ist* $\varphi$ *nahtreu oder ferntreu.*

*Beweis: Annahme.* Es gibt Punkte $X_1 \sim X_2$ mit $\varphi X_1 \nsim \varphi X_2$ und Punkte $Y_1 \nsim Y_2$ mit $\varphi Y_1 \sim \varphi Y_2$.

Wir zeigen nun, daß es dann auch ebensolche Punktepaare auf den Seiten der Basisparallelogramme geben muß. Sei $X_1 \sim X_2$. Nach Lemma 1.9 gibt es wenigstens drei paarweise kreuzende Geraden $g_1, g_2, g_3$ durch $X_1$, deren Bilder sich ebenfalls paarweise kreuzen. Ist $\varphi k \mathrm{I} \varphi X_1, \varphi X_2$, so gibt es sicher $g_i$ mit $\varphi k \nsim \varphi g_i$. O.B.d.A. sei $g_i = h_1$ und somit $P_1 \mathrm{I} g_i$. Aufgrund von 1.11 gibt es $Z \mathrm{I} g_i$ mit $Z \nsim P_1, X_1$ und $\varphi Z \nsim \varphi P_1, \varphi X_1$. Wegen 1.10 finden wir auf $P_1 P_2$ oder $P_1 P_3$ einen Punkt $T$ als Bild von $X_2$ unter der Projektion von $Z$, so daß $P_1 \sim T$, aber $\varphi P_1 \nsim \varphi T$ gilt. Entsprechend verfahren wir mit den Punkten $Y_1$, $Y_2$ und erhalten auf einer Basisgerade einen Punkt $U$ mit $P_i \nsim U$, $\varphi P_i \sim \varphi U$.

Nach eventuell weiteren Projektionen können wir davon ausgehen, daß Punkte $V, W \mathrm{I} P_1, P_2$ mit

$$V \sim P_1 \quad \text{und} \quad \varphi V \nsim \varphi P_1$$

bzw.

$$W \nsim P_2 \quad \text{und} \quad \varphi W \sim \varphi P_2$$

existieren.

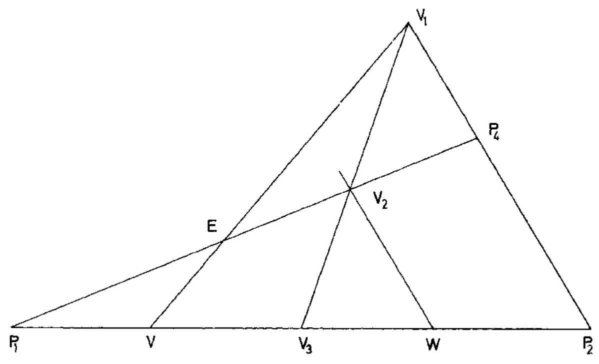


Fig. 1

Wir setzen $E = P_1 P_4 \cap P_2 P_3$. $V \sim P_1$ impliziert $VE \sim P_1 E$. Setze $V_1 = P_2 P_4 \cap VE$ und $V_2 = P_1 P_4 \cap L(W, P_2 P_4)$. Also gilt $V_1 \sim P_4$ und $V_2 \nsim P_4$. Daher ist $V_1 V_2 \sim P_1 E$ und somit $P_1 P_2 \cap V_1 V_2 = V_3 \sim P_1$. Wegen $\varphi V \nsim \varphi P_1$ ist $\varphi V_1 \nsim \varphi P_4$, wegen $\varphi W \sim \varphi P_2$ aber $\varphi V_1 V_2 \sim \varphi V_1 P_4 = \varphi P_2 P_4$, also $\varphi V_3 \sim \varphi P_2$. Somit existiert ein Punkt $V_3$ mit $V_3 \sim P_1$, aber $\varphi V_3 \sim \varphi P_2$, was der Regularität von $\varphi$ widerspricht. Die obige Annahme ist daher falsch und 1.15 bewiesen.

Mit einem Resultat von Bacon [2, 2.65].

**1.16. Satz.** *Jeder nicht-entartete, nahtreue AH-Morphismus ist ferntreu.*

erhalten wir den angekündigten Hauptsatz:

**1.17. Hauptsatz.** *Es sei $\varphi$: $\mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ regulärer AH-Morphismus der AH-Ebenen $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ und es existiert ein Paar $\varphi$ zugeordneter Basisparallelogramme, die der Bedingung* (F) *genügen. Dann ist $\varphi$ ferntreu.*

Unter den sinnvoll erscheinenden schwachen Zusatzbedingungen, die bei einer algebraischen Beschreibung der Homomorphismen unabdingbar erscheinen, erweist sich daher die Klasse der ferntreuen $AH$-Morphismen als die gesuchten relevanten strukturverträglichen Abbildungen von $AH$-Ebenen. Sie umfaßt offensichtlich die bei Bacon [2] und Artmann [1] betrachteten Abbildungen, wobei die Untersuchung von desarguesschen Ebenen die Existenz von ferntreuen $AH$-Morphismen, die nicht nahtreu sind, belegt. Allerdings sind solche $AH$-Morphismen keine Epimorphismen.

Beschränkt man sich auf Epimorphismen, so gilt:

**1.18. Satz.** *Für einen AH-Epimorphismus $\varphi$: $\mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ der AH-Ebenen $\mathscr{H}_1$, $\mathscr{H}_2$ sind folgende Aussagen gleichwertig:*

a) *$\varphi$ ist nahtreu.*

b) *$\varphi$ ist ferntreu.*

*Beweis.* Nach einem Satz von Corbas [3], dessen Beweis von Bacon [2, 2.63 bzw. S. 238] verbessert wurde, sind Epimorphismen affiner Ebenen schon Isomorphismen. Wegen 1.14 sind daher a) und b) offensichtlich äquivalent.

## 2. Ferntreue $AH$-Morphismen und Kongruenzrelationen

Um Eigenschaften von ferntreuen $AH$-Morphismen aufzeigen und nachweisen zu können, interessieren wir uns nun für „Kerne" bzw. die zugehörigen induzierenden Äquivalenzrelationen solcher Abbildungen.

Ist $\varphi: \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ ein ferntreuer $AH$-Morphismus, so definiert $P\, \tau_\varphi\, Q \Leftrightarrow \varphi P = \varphi Q$ in der Punktmenge von $\mathcal{H}_1$ eine Äquivalenzrelation $\tau_\varphi$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) $\tau_\varphi \subseteq \sim$,

(2) $P\, \tau_\varphi\, Q, P \mathrm{I} g, g \nsim h \Rightarrow g \cap h\, \tau_\varphi\, L(Q, g) \cap h$.

Äquivalenzrelationen mit den Eigenschaften (1) und (2) werden wir jetzt unsere Aufmerksamkeit widmen.

**2.1. Definition.** Ist $\tau$ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der Punkte einer $AH$-Ebene, so heißt $\tau$ eine *Kongruenzrelation (K-Rel.)*, wenn gelten

(K1) $\tau \subseteq \sim$,

(K2) $P\, \tau\, Q, P \mathrm{I} g, g \nsim h \Rightarrow g \cap h\, \tau\, L(Q, g) \cap h$.

*Bemerkungen.* 1. $\mathrm{id} \subseteq \tau \subseteq \sim$ $(P = Q \Leftrightarrow (P, Q) \in \mathrm{id})$.

2. $\sim$ ist K-Rel.

Mit $[P]_\tau$ bezeichnen wir im folgenden die Äquivalenzklasse von $P$ bzgl. $\tau$.

**2.2. Lemma.** *Sei $\mathcal{H}$ AH-Ebene und $\tau$ K-Rel. Für alle Fahnen $(P, g)$, $(Q, h)$ gilt:*

$$|[P]_\tau \cap g| = |[Q]_\tau \cap h|.$$

*Beweis.* Man überlegt sich, daß man sich auf den Fall $P = Q$ beschränken kann. Dann projiziere man parallel.

**2.3. Lemma.** *Sei $\mathcal{H}$ AH-Ebene und $\tau$ K-Rel. $P \mathrm{I} g, h$, $Q \mathrm{I} g$, $R \mathrm{I} h$, $g \nsim h$. Dann impliziert $Q\, \tau\, R$ stets $P\, \tau\, Q$ und $P\, \tau\, R$.*

**2.4. Lemma.** *Es seien $\tau_1, \tau_2$ K-Rel. einer AH-Ebene $\mathcal{H}$, ferner $A \mathrm{I} g$ und $[A]_{\tau_1} \cap g \subseteq [A]_{\tau_2} \cap g$. Dann gilt:*

$$[A]_{\tau_1} \subseteq [A]_{\tau_2}.$$

*Beweis.* Ist $|[A]_{\tau_1}| = 1$, so sind wir fertig. Wegen 2.2 können wir davon ausgehen, daß es $B \mathrm{I} g$ mit $B\, \tau_1\, A$ gibt. Sei $A, B \mathrm{I} h$, dann existiert mindestens eine Gerade $k \mathrm{I} A$ mit $k \nsim g, h$. Setzen wir $B' = L(B, k) \cap g \in [A]_{\tau_1} \cap g$, so ist $B'\, \tau_2\, A$. Mit (K2) erhalten wir $B\, \tau_2\, A$.

**2.5. Satz.** *In einer AH-Ebene $\mathcal{H}$ ist jede K-Rel. durch den Schnitt einer Äquivalenzklasse eines Punktes mit einer inzidierenden Geraden festgelegt.*

*Beweis.* Wir zeigen: Ist $A$ ein Punkt in $\mathcal{H}$ und $\tau_1, \tau_2$ K-Rel. mit $[A]_{\tau_1} \cap g \subseteq [A]_{\tau_2} \cap g$, so ist für alle Punkte $B$ stets $[B]_{\tau_1} \subseteq [B]_{\tau_2}$. Es genügt, die Behauptung für Punkte $B \nsim A$ zu verifizieren.

Ist $|[B]_{\tau_1}| = 1$, so sind wir fertig. Also können wir nun davon ausgehen, daß es auf jeder Geraden $h \mathrm{I} B$ einen Punkt $Y \in [B]_{\tau_1}$ mit $Y \neq B$ gibt. Wegen 2.4 ist $[A]_{\tau_1} \subseteq [A]_{\tau_2}$. Sei $g \mathrm{I} A, B$. Nach 2.4 genügt es, $[B]_{\tau_1} \cap h \subseteq [B]_{\tau_2} \cap h$ insbesondere für eine Gerade $h \nsim g$ mit $B \mathrm{I} h$ nachzuweisen. Sei $Y \mathrm{I} h$ und $B\, \tau_1\, Y$. Für $Z = k \cap L(Y, g)$ mit $A \mathrm{I} k \nsim g$ folgt $A\, \tau_1\, Z$, also $A\, \tau_2\, Z$ und wegen (K2) auch $B\, \tau_2\, Y$.

Von grundlegender Bedeutung für die Struktur der $AH$-Ebenen ist nun:

**2.6. Satz.** *Die Menge der K-Rel. einer AH-Ebene $\mathscr{H}$ ist durch Inklusion linear geordnet.*

*Beweis.* Es genügt zu zeigen:

$$[A]_{\tau_2} \nsubseteq [A]_{\tau_1} \Rightarrow [A]_{\tau_1} \subseteq [A]_{\tau_2} \quad \text{für K-Rel. } \tau_1, \tau_2.$$

O.B.d.A. können wir voraussetzen, daß $[A]_{\tau_1}$, $[A]_{\tau_2}$ mehr als einen Punkt enthalten. Sei $X \in [A]_{\tau_2}$ und $X \notin [A]_{\tau_1}$. Es sei $g \,\mathrm{I}\, A, X$. Wir wählen $h \not\sim g$ mit $A \,\mathrm{I}\, h$. Sei $Y \in [A]_{\tau_1} \cap h$. Setze $k \,\mathrm{I}\, X, Y$. Wäre $k \not\sim g$, so folgte mit 2.3 und $Y \tau_1 A$ auch $X \tau_1 Y \tau_2 A$. Widerspruch! Also gilt $g \sim k$ und somit $h \not\sim k$. Mit $X \tau_2 A$ und $A = L(A, k) \cap h \tau_2 k \cap h = Y$ folgt daher $Y \tau_2 A$, was aufgrund von 2.4 die Behauptung verifiziert.

Dieser Satz kann, ähnlich wie im projektiven Fall in [9] ausgeführt, als Ausgangspunkt einer Klassifizierung von $AH$-Ebenen dienen. Dabei benutzt man vorteilhaft den Ordnungstyp der Menge der Kongruenzrelationen bzw. spezieller Kongruenzrelationen als Strukturmerkmal. Die von Drake [5] bzw. Artmann [1] angegebenen Klassen von Hjelmslev-Ebenen lassen sich hier sinnvoll einordnen. Wir erwähnen als Beleg folgendes Lemma:

**2.7. Lemma.** *Jede uniforme AH-Ebene* [8] *besitzt genau zwei Kongruenzrelationen, nämlich $\sim$ und* id.

*Beweis.* Sei $\mathrm{id} \neq \tau$ K-Rel. von $\mathscr{H}$. Es genügt wegen 2.4 und 2.6 zu zeigen: $[A]_{\sim} \cap h \subseteq [A]_{\tau} \cap h$ für ein $h$. Sei $A \sim B$ mit $A, B \,\mathrm{I}\, g$. Nach 2.2 gibt es auf $h \not\sim g$ mit $A \,\mathrm{I}\, h$ einen Punkt $X \neq A$ mit $A \tau X$. Sei $k \,\mathrm{I}\, X, B$. Wegen der Uniformität von $\mathscr{H}$ kann $k$ nicht zu $g$ benachbart sein. Also gilt $k \not\sim g$ und somit aufgrund von (K 2) $B \tau X$, d.h. $A \tau B$.

Die Umkehrung von 2.7 gilt nicht. Unlängst wurde von Drake [6] eine endliche $AH$-Ebene angegeben, die nicht uniform ist und ebenfalls nur die trivialen K-Rel. besitzt.

Wie wir am Anfang des Kapitels bemerkt haben, gilt nun

**2.8. Lemma.** *Für jeden ferntreuen AH-Morphismus $\varphi\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ definiert*

$$P \tau_\tau Q \Leftrightarrow \varphi P = \varphi Q$$

*eine Kongruenzrelation $\tau_\varphi$ in $\mathscr{H}_1$.*

In Anwendung von 2.5 und 2.8 erhalten wir

**2.9. Lemma.** *Jedes ferntreue, epimorphe Bild einer AH-Ebene, das AH-Ebene ist, ist bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt durch das inverse Bild eines Punktes.*

Die lineare Ordnung in der Menge der Kongruenzrelationen zieht für ferntreue $AH$-Epimorphismen folgende interessante Eigenschaft nach sich:

**2.10. Satz.** *Es seien $\varphi_i\colon \mathscr{H} \to \mathscr{H}_i$ ferntreue AH-Epimorphismen der AH-Ebenen $\mathscr{H}, \mathscr{H}_i$ $(i = 1, 2)$.*

*Dann existiert mindestens ein ferntreuer AH-Epimorphismus $\psi_{ij}\colon \mathscr{H}_i \to \mathscr{H}_j$ $(i, j \in \{1, 2\}, i \neq j)$.*

*Beweis.* Wir setzen $P \tau \varphi_i Q \Leftrightarrow \varphi_i P = \varphi_i Q$.

Sei o.B.d.A. wegen 2.6 und 2.8 $\tau_{\varphi_1} \subseteq \tau_{\varphi_2}$. Dann ist offensichtlich $\psi_{12}\colon \varphi_1 P \mapsto \varphi_2 P$ bzw. $\psi_{12}\colon \varphi_1 g \mapsto \varphi_2 g$

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{H} \arrow[dl, "\varphi_1"'] \arrow[dr, "\varphi_2"] & \\ \mathscr{H}_1 \arrow[rr, "\psi_{12}"'] & & \mathscr{H}_2 \end{tikzcd}$$

wohldefiniert und surjektiv.

Sei $\varphi_1 P \mathrm{I} \varphi_1 g$, so gibt es $Q \mathrm{I} g$ mit $\varphi_1 P = \varphi_1 Q$ (1.6), also $\varphi_2 Q = \varphi_2 P \mathrm{I} \varphi_2 g$. $\psi_{12}$ ist somit inzidenzerhaltend. Sei $\varphi_1 g \| \varphi_1 h$; ist $\varphi_1 g = \varphi_1 h$, so ist sicher $\varphi_2 g = \varphi_2 h$, also $\varphi_2 g \| \varphi_2 h$. Ist dagegen $\varphi_1 g \cap \varphi_1 h = \varnothing$, so auch $g \| h_1$ mit $\varphi_1 h_1 = \varphi_1 h$, also $\varphi_2 g \| \varphi_2 h$. Nach 1.18 sind ferntreue AH-Epimorphismen überdies nahtreu, d.h. $\varphi_1 P \not\sim \varphi_1 Q$ impliziert $P \not\sim Q$, also auch $\varphi_2 P \not\sim \varphi_2 Q$, weswegen $\psi_{12}$ ferntreu (und auch nahtreu) ist.

Analog wie im projektiven Fall [9] führt man den Beweis von 2.11:

**2.11. Satz.** *Sei $\varphi\colon \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ ferntreuer Epimorphismus der AH-Ebenen $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$. Dann gibt es eine bijektive, isotone Abbildung $f$ der Kongruenzrelationen $\tau$ von $\mathscr{H}_1$ mit $\tau_\varphi \subseteq \tau \subseteq \sim$ auf die Kongruenzrelationen von $\mathscr{H}_2$.*

Da der Verband der Kongruenzrelationen eine Kette ist, ergibt sich durch Induktion unter Benutzung von 2.11 und 2.7:

**2.12. Satz.** *Eine AH-Ebene der Höhe $n$* (Artmann [1]) *besitzt genau $n$ Kongruenzrelationen.*

## Literatur


1. Artmann, B.: Hjelmslev-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaftsrelationen. Math. Z. **112**, 163–180 (1969)
2. Bacon, P. Y.: Coordinatized Hjelmslev Planes. Dissertation. University of Florida, Gainesville 1974
3. Corbas, V.: La non existenza di omorfismi propri fra piani affini. Rend. Math. **24**, 373–376 (1965)
4. Dembowski, P.: Finite geometries. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968
5. Drake, D. A.: On $n$-uniform Hjelmslev planes. J. combinat. Theory **9**, 267–288 (1970)
6. Drake, D. A., Shult, E.: Construction of Hjelmslev planes from $(t, r)$-nets. Preprint 1974
7. Lorimer, J. W.: Morphisms and the Fundamental Theorem of affine Hjelmslev planes. Mathematical Report 64, McMaster University, Hamilton, Ontario, Canada 1973
8. Lüneburg, H.: Affine Hjelmslev-Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **79**, 260–288 (1962)
9. Törner, G.: Eine Klassifizierung von Hjelmslev-Ringen und Hjelmslev-Ebenen. Mitt. math. Sem. Gießen **107** (1974)



Dr. Günter Törner
Mathematisches Institut
der Justus Liebig-Universität
D-6300 Gießen
Arndtstr. 2
Bundesrepublik Deutschland


*(Eingegangen 7. Oktober 1974)*