

MITTEILUNGEN
aus dem
MATHEM. SEMINAR GIESSEN

Herausgegeben von den Professoren
des Mathematischen Instituts der Universität Giessen

Geschäftsführung: D. Gaier, G. Pickert

Sonderdruck aus Heft 121

CODEN: MMUGAU

GIESSEN 1976

SELBSTVERLAG DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS

Bemerkungen zu (6,2)-Hjelmslev-Ebenen

Günter Törner¹⁾

Herrn Prof. Dr. H. Boerner zum 70. Geburtstag gewidmet

Hjelmslev-Ebenen \mathcal{H} (kurz: H-Ebenen) sind projektive bzw. affine Inzidenzstrukturen, in denen zwei Punkte mehr als eine Verbindungsgerade (in projektiven Hjelmslev-Ebenen - kurz: PH-Ebenen - zwei Geraden mehr als einen Schnittpunkt) haben können. Die dadurch gekennzeichnete Nachbarrelation \sim soll transitiv und die Faktorstruktur \mathcal{H}/\sim eine projektive bzw. affine Ebene sein. Die ausführlichen Definitionen für PH-Ebenen, AH-Ebenen (affinen Hjelmslev-Ebenen), FAH-Ebenen (fast-affinen Hjelmslev-Ebenen) findet der Leser u.a. in [3].

Endlichen H-Ebenen ordnet man ein Parameterpaar (t, r) zu; dabei ist t^2 die Anzahl der zu einem Punkt benachbarten Punkte und r die Ordnung der zugehörigen projektiven bzw. affinen Ebene. Im folgenden beschäftigen wir uns mit (6,2)-H-Ebenen, wobei bislang die Existenzfrage für PH-Ebenen bzw. AH-Ebenen noch offen ist.

Wie in [8] bzw. [7] gezeigt wurde, besitzt jede H-Ebene (bis auf Isomorphie) genau eine Auflösung, d.h. eine Folge von H-Epimorphismen ψ_i und epimorphen Bildern \mathcal{H}_i mit

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_n \xrightarrow{\psi_{n-1}} \mathcal{H}_{n-1} \longrightarrow \dots \longrightarrow \mathcal{H}_1 = \mathcal{H}/\sim$$

Hat die Auflösung die Länge n , so nennen wir \mathcal{H} eine H-Ebene des Typs n . Den Quotienten $q_i = t_i/t_{i+1}$ bezeichnen wir als den i -ten Stufenparameter, wobei (t_i, r) bzw. (t_{i-1}, r) die Invarianten der Ebenen \mathcal{H}_i bzw. \mathcal{H}_{i-1} in einer Auflösung von $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$ sind. Die "Kerne" der H-Epimorphismen sind gerade die K-Rel., aus [9] zitieren wir:

Definition: Eine Äquivalenzrelation τ in der Punktmenge \mathcal{P} einer FAH-Ebene bzw. AH-Ebene $\mathcal{H} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \epsilon)$ heißt Kongruenzrelation (K-Rel.), falls gelten:

$$1. \tau \subseteq \sim$$

$$\text{Wir setzen: } \left. \begin{array}{l} g \tau h \Leftrightarrow \forall P \in g \exists Q \in h \\ \forall Q \in h \exists P \in g \end{array} \right\} P \tau Q$$

1) Der Autor dankt der Stiftung Volkswagenwerk für die Unterstützung während der Abfassung dieser Arbeit.

2. $u(P, g) = |\{ h \mid P \in g, h, g \tau h \}| = u_\tau$ ist unabhängig von der Fahne (P, g) .
3. $P_1, P_2 \in g, Q_1, Q_2 \in h, P_1 \neq P_2, P_i \tau Q_i \Rightarrow g \tau h$
4. $g \tau h, |g \cap k| = 1, |g \cap h| > 1 \Rightarrow g \cap k \tau h \cap k$
5. $P \in g, h, g \sim h, \neg(g \tau h) \Rightarrow \exists Q \in \mathcal{R} : \neg(P \tau Q)$ mit $g \tau Q \tau h$.
6. Ist \mathcal{H} eine AH-Ebene, so folgt aus $P \tau Q, P \in g, Q \in h, g \parallel h$ stets $g \tau h$.

In [8] bzw. [7] findet man die (ähnliche) Definition für den projektiven Fall.

Da eine H-Ebene \mathcal{H} vom Typ n genau eine Auflösung besitzt und die Kerne den oben definierten K-Rel. entsprechen, erhalten wir für \mathcal{H} eine Kette von n K-Rel.

$$id = (\sim n) \subset (\sim n-1) \subset \dots \subset (\sim 1) = \sim .$$

Punkte P, Q (Geraden g, h) mit $P(\sim i)Q$ ($g(\sim i)h$) bezeichnen wir als (ωi) -benachbart. Für $P(\sim i)Q$ und $\neg(P(\sim i+1)Q)$ schreiben wir $P(\sim i)Q$.

Nachdem wir die Begriffe bereitgestellt haben, können wir nun die Ergebnisse formulieren, die wir unten beweisen werden:

- A. (6,2)-PH-Ebenen sind vom Typ 2, d.h. einfach.
- B. Es gibt eine (6,2)-FAH-Ebene vom Typ 3.
- C. Eine (6,2)-FAH-Ebene vom Typ 3 besitzt keinen Parallelismus; insbesondere sind daher (6,2)-AH-Ebenen einfach.

A. Ist \mathcal{J} eine Punktmenge in einer H-Ebene \mathcal{H} , so induziert nach \mathcal{J} eine Inzidenzstruktur, die induzierte Inzidenzstruktur: als Punkte nehmen wir die Elemente von \mathcal{J} , während wir die nichtleeren Schnitte von Geraden aus \mathcal{H} mit \mathcal{J} als Geraden dieser neuen Struktur bezeichnen (siehe auch [1]). Wie in [4] setzen wir für eine Gerade g mit $g \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$ stets $g' = g \cap \mathcal{J}$.

Lemma 1: Es sei \mathcal{H} eine (6,2)-H-Ebene vom Typ 3 und

$$[P]_{\sim 2} = \{ Q \mid P(\sim 2)Q \} . \text{ Dann ist die nach } [P]_{\sim 2} \text{ induzierte Inzidenzstruktur eine affine Ebene.}$$

Beweis: Da es keine (3,2)-H-Ebenen gibt [4], besitzt $\mathcal{H} = \mathcal{H}_3$ als echtes epimorphe Bild eine (2,2)-H-Ebene \mathcal{H}_2 , d.h. $q_2 = 2$ bzw. $q_3 = 3$. Ähnlich wie in [2] sieht man, daß \mathcal{H} nach $[P]_{\sim 2}$ ein r -Netz der Ordnung q_3 induziert. Wegen $\sqrt{q_3} < 2 = r$ schneiden sich je zwei

verschiedene Transversalen dieses Netzes in genau einem Punkt, so daß die induzierte Struktur eine affine Ebene der Ordnung 3 sein muß.

Lemma 2: Benachbarte Geraden einer (6,2)-H-Ebene vom Typ 3 schneiden sich nie in genau vier Punkten.

Beweis: gegenteilige Annahme: Es sei $g \cap h = \{P_1, P_4, P_5, P_6\}$ mit $P_1(\sim 1)P_4(\sim 2)P_5(\sim 2)P_6(\sim 2)P_4$ (Lemma 1!). Die mittlere Verbindungszahl (~ 1)-benachbarte Punkte ist nach [9]

$$\lambda_1 = \frac{(r+1)q_2}{q_2 + 1} = 2 .$$

Daher haben je zwei (~ 1)-benachbarte Punkte genau zwei Verbindungsgeraden. Ist $Q \in h \setminus g \cap h$, $Q \sim P_1$, so gibt es eine Gerade $k \neq g, h$, die wegen Lemma 1 die Gerade g mindestens in einem der Punkte P_4, P_5, P_6 schneiden muß. Dies widerspricht $\lambda_1 = 2$.

Lemma 3: Es sei \mathcal{H} eine (t,r) H-Ebene und τ eine K-Rel. von \mathcal{H} mit der Invarianten $u_\tau = u$. Ist n die minimale Verbindungszahl benachbarter Punkte, so folgt aus

$$[P, Q] \geq t+n-1 \text{ un stets } P \tau Q .$$

Beweis: [9]

Damit läßt sich nun Satz 1 beweisen:

Satz 1: Jede (6,2)-PH-Ebene ist vom Typ 2, d.h. einfach.

Beweis: gegenteilige Annahme: Nach Lemma 1 wird durch nach $[P]_{\sim 2}$ eine affine Ebene der Ordnung 3 induziert. Daher gibt es eine Gerade $g \ni P$, so daß für alle Geraden $h \ni P$, $h \sim g$ gilt: $X \in g$, $P(\sim 2)X \Rightarrow X \in h$. Insbesondere existieren Geraden $g(\sim 1)h$ mit $|g \cap h| \geq 3$, was mit der dualen Fassung von Lemma 3 zu einem Widerspruch führt.

B. In [3] als auch in [6] wurden von DRAKE bzw. DRAKE/SHULT (6,2)-FAH-Ebenen mit gruppentheoretischen Hilfsmitteln konstruiert. Der äußerst mühsame Vergleich auf Isomorphie ist bislang, auch von den Verfassern, nicht gegeben worden. Gleichfalls offen ist die Frage nach dem jeweiligen Typ. Daher gestatten wir es uns, ohne den Vergleich zu führen, eine (gegebenenfalls weitere) (6,2)-FAH-Ebene aufzubauen, die vom Typ 3 ist.

Satz 2: Es existiert eine (6,2)-FAH-Ebene vom Typ 3.

Beweis: Wir gehen von der Inzidenzmatrix M einer (2,2)-FAH-Ebene aus.

$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{matrix}$				$\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{matrix}$		
	$\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \end{matrix}$	
		$\begin{matrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 \end{matrix}$		$\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ & 1 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 \\ 1 & & & 1 \end{matrix}$

Punkte werden durch Zeilen, Geraden durch Spalten repräsentiert. Analog wie in [5] bilden wir mit Hilfe einer affinen Ebene der Ordnung 3 vier symmetrische 9×9 - $(0,1)$ -Matrizen A,B,C,D, wobei gelten:

$$AB = AC = AD = BC = BD = CD, A^2 = 3a, B^2 = 3B, C^2 = 3C, D^2 = 3D,$$

$A+B+C+D \geq J$ (Mit J bezeichnen wir die Matrix, die an jeder Stelle den Eintrag 1 hat.)

A =

1	1	1						
1	1	1						
1	1	1						
			1	1	1			
			1	1	1			
			1	1	1			
						1	1	1
						1	1	1
						1	1	1

B =

1						1		1
	1				1	1		
		1	1				1	
		1	1				1	
				1				1
				1				1
					1	1		
					1	1		
					1	1		

C =

1				1		1		1
	1			1		1		1
		1		1		1		1
		1		1		1		1
			1	1		1		1
			1	1		1		1
					1	1		
					1	1		
					1	1		

D =

1				1		1		1
	1			1		1		1
		1		1		1		1
		1		1		1		1
			1	1		1		1
			1	1		1		1
					1	1		
					1	1		
					1	1		

In der Inzidenzmatrix M ersetzen wir nun die 1-Einträge wie folgt durch die Matrizen A,B,C,D, während wir für einen 0-Eintrag die 9x9-Nullmatrix schreiben.

<p>A A B B B B A A</p>	<p>B B A A A A B B</p>				<p>D C C D D C C D</p>
<p>C D D C C D D C</p>		<p>A A B B B B A A</p>	<p>B B A A A A B B</p>		
	<p>C C C C D D D D</p>		<p>D D D D C C C C</p>	<p>A B B A A B B A</p>	
		<p>C C C C D D D D</p>		<p>D D D D C C C C</p>	<p>A B B A A B B A</p>

Durch direkte Überprüfung oder mit Hilfe eines Satzes aus [9] folgt, daß die konstruierte Matrix M^1 Inzidenzmatrix einer (6,2)-FAH-Ebene vom Typ 3 ist.

- C. Daß diese in B. angegebene Ebene keine AH-Ebene vom Typ 3 sein kann, erkennt man, wenn man das Spaltenprodukt $A^2+B^2+C^2+D^2$ (≥ 3) berechnet. Somit schneiden sich (≈ 2)-benachbarte Geraden stets in genau drei Punkten. Mehr noch - es gilt sogar der folgende Satz für jede (6,2)-FAH-Ebene vom Typ 3:

Satz 3: Eine (6,2)-FAH-Ebene \mathcal{E} vom Typ 3 besitzt keine Parallelismus.

Unter einem Parallelismus verstehen wir eine Äquivalenzrelation in der Menge der Geraden, wobei jede Klasse eine Partition der Punktmenge ist.

Als Folgerung aus Satz 3 erhält man unmittelbar:

Folgerung 1: Eine (6,2)-AH-Ebene ist einfach,

was als Indiz für die Schwierigkeit des Existenzproblems angesehen werden kann.

Den Beweis von Satz 3 zerlegen wir in kleinere Abschnitte und beweisen zunächst:

Lemma 4: Es sei \mathcal{H} eine (6,2)-FAH-Ebene vom Typ 3. Dann gibt es zu jedem Punkt P Geraden g, h mit

$$(*) P \in g, h, g(\sim 1)h \text{ und } |h' \cap g'| = |h \cap g \cap [P]_{\sim 2}| = 1.$$

Beweis: Da die nach $[P]_{\sim 2}$ induzierte Struktur eine affine Ebene der Ordnung 3 ist, gibt es Geraden g, h mit $|g' \cap h'| = 1$. Es sei $g(\sim 2)h$. Wegen $q_3 = 3$ inzidiert eine weitere Gerade $k(\sim 2)g$ mit P. O.B.d.A. $g' = k'$. (Lemma 1). Zu einem Punkt $Q \in h$, $Q(\sim 2)P$ muß es eine Gerade $l \neq h$ mit $P, Q \in l$ geben; also ist $l(\sim 1)g$, was Lemma 4 beweist.

Lemma 5: Es sei \mathcal{H} eine (6,2)-FAH-Ebene vom Typ 3. Genügen P, g, h (*), so gilt: Jede zu $g(\sim 2)$ -benachbarte Gerade k schneidet g in genau drei Punkten.

Beweis: Wir setzen: $\mu_2(g) = |\{1 \mid l(\sim 2)g \text{ und } |g \neq l \Rightarrow g \cap l = \emptyset\}|$.

Dann ist die mittlere Schnittzahl für zu $g(\sim 2)$ -benachbarte Geraden mit g:

$$\eta_2 = \frac{r \cdot t(q_3 - 1)}{q_3^2 - \mu_2(g)}$$

d.h. $(q_3^2 - \mu_2(g))\eta_2 = 24$. Andererseits gilt: $24 = 2x + 3y + 6z$.

Dabei ist x bzw. y bzw. z die Anzahl der zu $g(\sim 2)$ -benachbarten Geraden mit genau 2 bzw. 3 bzw. 6 Schnittpunkten mit g. Wegen (*) und $\lambda_1 = 2$ folgt $z \leq 1$. Annahme: $z = 1$, also $2x + 3y = 18$ mit $x + y \leq 7$. Als ganzzahlige Lösungen unter dieser Nebenbedingung erhalten wir: $x = 3, y = 4$ bzw. $x = 0, y = 6$.

Fall 1: $x = 3, y = 4$

Wir setzen: $g = g_1$ und $P_1(\sim 1)Q_1 \neq R_1(\sim 1)S_1 \in g_1$. Zu P_1 sind die Punkte $P_2, \dots, P_9(\sim 2)$ -benachbart usw. Es sei $P_1, P_2, P_3, Q_1, \dots, R_1, \dots, S_1, \dots, S_3 \in g_1$. Ferner schneide die Gerade h mit $|g_1 \cap h| = 6$ in der Nachbarschaft von R_1 . Wegen $\lambda_1 = 2$ schneiden keine (~ 2) -benachbarte Geraden in der Nachbarschaft von R_1 die Gerade g in genau zwei Punkten. O.B.d.A. setzen wir daher:

$P_1, P_5, P_9, Q_1, Q_5, Q_9 \in \mathcal{G}_2$, $P_2, P_6, P_7, Q_2, Q_6, Q_7 \in \mathcal{G}_3$, $P_3, P_4, P_8, Q_3, Q_4, Q_8 \in \mathcal{G}_4$
 Auf \mathcal{G}_5 mit $|\mathcal{G}_5 \cap \mathcal{G}_1| = 3$ liegen o.B.d.A. die Punkte P_1, P_2, P_3 ,
 $Q_4, Q_5, Q_6, R_4, R_5, R_6, S_4, S_5, S_6$. Dann folgt $R_7, R_8, R_9, S_7, S_8, S_9 \in \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4$,
 was $\lambda_1 = 2$ widerspricht.

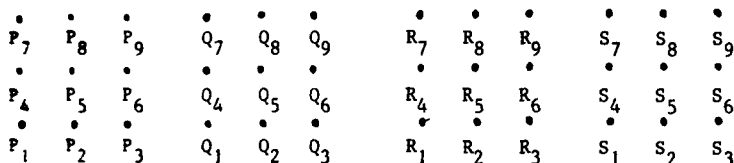


Fig. 1

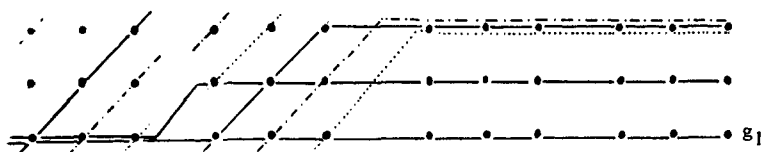


Fig. 2

Fall 2: $x = 0$, $y = 6$

Wegen $x + y + 1 = 7$ existiert eine Gerade $g_2 (\simeq 2)g_1$ mit $g_2 \cap g_1 = \emptyset$.

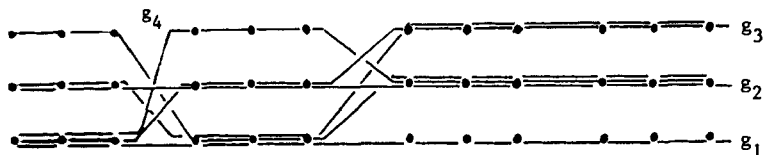


Fig. 3

Es sei $\{ P_4, \dots, P_6, \dots, S_4, \dots, S_6 \} = g_2$. Da nach Voraussetzung eine Gerade $h(\sim 1)g_1$ mit $|g_1 \cap h| = 2$ existiert, können sich wegen $\lambda_1 = 2$ keine (~ 2) -benachbarte Geraden, die zu g (~ 2) -benachbart sind, in der Nachbarschaft von P_1 in sechs Punkten schneiden. Wir setzen o.B.d.A.

$$g_3 = \{ P_1, P_2, P_3, Q_4, Q_5, Q_6, R_7, R_8, R_9, S_7, S_8, S_9 \}$$

$$g_4 = \{ P_1, P_2, P_3, Q_7, Q_8, Q_9, R_4, R_5, R_6, S_4, S_5, S_6 \} .$$

$$g_5 = \{ P_4, P_5, P_6, Q_1, Q_2, Q_3, R_7, R_8, R_9, S_7, S_8, S_9 \} \text{ Für } g_6 (\sim 2)g_1$$

mit $P_7, P_8, P_9, Q_1, Q_2, Q_3 \in g_6$ folgt dann $R_4, Q_4 \in g_6$, also

$R_4, Q_4 \in g_2, g_4, g_6$ im Widerspruch zu $\lambda_1 = 2$.

Daher ist $z = 0$. Wir erhalten durch $24 = 2x + 3y \leq 3x + 3y \leq 3 \cdot 8 = 24$ sofort $x = 0$ und $y = 8$, insbesondere $\mu_2(g) = 1$, w.z.b.w.

Folgerung 2: Unter den Voraussetzungen von Lemma 5 folgt aus

$$|g' \cap h'| = 1 \text{ stets } g(\sim 1)h.$$

Folgerung 3: Besitzt \mathcal{A} als $(6,2)$ -FAH-Ebene vom Typ 3 einen Parallelismus, so sind die Parallelen zu einer Geraden g mit $(*)$ stets (~ 1) -benachbart zu g , so daß \mathcal{A} keine AH-Ebene vom Typ 3 sein kann. Parallelen zu g durch Punkte, die zu P (~ 2) -benachbart sind, sind zu sämtlichen Punkten $P_i \in g$, $P_i \sim P$ (~ 2) -benachbart, zu Punkten $Q_i \in g$, $Q_i \sim Q \in g$, $Q \neq P$ immer (~ 1) -benachbart.

Mit Lemma 5 und Folgerungen 2 und 3 können wir nun den Beweis von Satz 3 führen.

Beweis von Satz 3: Annahme: Es sei \mathcal{A} eine FAH-Ebene vom Typ 3 und besitze einen Parallelismus. Analog wie in Lemma 5 numerieren wir die Punkte, wobei wir wegen Lemma 4 einen Punkt P und Geraden g, h mit $(*)$ betrachten können. Es sei $g = g_1$ und $h = h_1 \ni P_1, P_5, P_7$. Nun ist wegen Folgerung 3 die Parallele zu g_1 durch P_5 zu g_1 (~ 1) -benachbart, andererseits aufgrund von $|h_1 \cap k_1 \cap [P_1]_{\sim 2}| = 1$ und Folgerung 2 daher $h_1(\sim 1)k_1$. Somit wäre $R_1(\sim 2)k_1$, im Widerspruch zur Folgerung 3.

LITERATUR:

- [1] **ARTMANN, B.:** Hjelmslev-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaftsrelationen. Math.Z. 112 (1969), 163-180.
- [2] **BRUCK, R.H.:** Finite nets II. Uniqueness and embedding. Pacif.J.Math. 13 (1963), 421-457.
- [3] **DRAKE, D.A.:** Near affine Hjelmslev planes. J. Combinatorial Theory 16 (1974), 35-50.
- [4] **DRAKE, D.A.:** Nonexistence results for finite Hjelmslev planes. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 40 (1974), 100-110.
- [5] **DRAKE, D.A. und LEXZ, H.:** Finite Klingenberg planes. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 44 (1975), 70-83.
- [6] **DRAKE, D.A. und SECLT, E.E.:** Construction of Hjelmslev planes from (t,k) -nets. erscheint in Geometriae dedicata.
- [7] **DRAKE, D.A. und TÖRNER, G.:** Die Invarianten einer Klasse projektiverer Hjelmslev-Ebenen. erscheint in J. Geometry.
- [8] **TÖRNER, G.:** Eine Klassifizierung von Hjelmslev-Ringen und Hjelmslev-Ebenen. Mitt. Math. Sem. Gießen 107 (1974).
- [9] **TÖRNER, G.:** Über den Stufenaufbau von Hjelmslev-Ebenen, erscheint demnächst.

Günter Törner
Technische Hochschule
Fachbereich Mathematik
Schloßgartenstr. 7
6100 Darmstadt (BRD)