Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet 1826 von

August Leopold Crelle

fortgeführt von
C. W. Borchardt, K. Weierstrass, L. Kronecker,
L. Fuchs, K. Hensel, L. Schlesinger

gegenwärtig herausgegeben von

Helmut Hasse · Hans Rohrbach

JRMAA8

Band 285

Sonderdruck

Walter de Gruyter · Berlin · New York 1976

Unzerlegbare, injektive Moduln über Kettenringen

Von *Günter Törner* in Darmstadt

In verallgemeinerten projektiven Inzidenzstrukturen treten als Koordinatenbereiche lokale Ringe auf, deren Links- und Rechtsidealverband linear geordnet sind [3]. Solche Ringe werden wir Kettenringe nennen, die auch seit einiger Zeit in der Ringtheorie als Verallgemeinerungen von Bewertungsringen untersucht werden.

Nun zeigt sich, daß die Struktur des Idealverbandes wesentliche geometrische Informationen der zugehörigen Ebenen beinhaltet und dadurch eine Klasse von Ringen als besonders ‚schöne' Objekte geometrisch ausgezeichnet werden.

Es stellt sich somit die Frage, ob solche Kettenringe auch modultheoretisch interessant sind, was durch die Arbeit belegt werden wird.

Hauptergebnis ist eine idealverbandstheoretische Charakterisierung derjenigen Duo-Kettenringe, die endlich viele Isomorphietypen von unzerlegbaren, injektiven Moduln besitzen. Der *Hauptsatz* dieser Arbeit besagt *(Satz 4. 2)*:

Ein Duo-Kettenring R besitzt genau dann endlich viele Typen von unzerlegbaren, injektiven Moduln, wenn er endlich viele Primideale hat und jedes Ideal I sich als P-Abschluß eines Hauptideals aR oder eines Ideals aP darstellen läßt. Dabei ist P das dem Ideal I zugeordnete tertiäre Radikal und der P-Abschluß

$$\mathrm{cl}_P(I) = \{x \mid \exists s \in R \setminus P : sR \subseteqq x^{-1} I\}.$$

In dieser Arbeit sind Ringe nicht notwendig kommutativ, besitzen aber ein Einselement. Ideale werden als vom Ring verschieden angesehen. Alle Moduln sind unitäre Rechtsmoduln. Mit $E_R(M)$ bezeichnen wir die injektive Hülle eines R-Moduls M. Ein Modul heißt unzerlegbar, wenn er keinen echten direkten Summanden besitzt. Bezüglich der Terminologie verweisen wir auf J. Lambek [4] und B. Stenström [6]. Mit $\subset$ bezeichnen wir die strenge Inklusion.

Herrn Prof. Dr. Michler und Herrn Dr. Brungs bin ich für wertvolle Ratschläge bei der Abfassung der Arbeit zu Dank verpflichtet.

1. Über unzerlegbare, injektive Moduln

Mit einem Satz von Matlis [5] lassen sich die unzerlegbaren, injektiven Moduln über einem Ring R bis auf Isomorphie als die injektiven Hüllen der Faktormoduln von R nach irreduziblen Rechtsidealen charakterisieren.

Für irreduzible Rechtsideale A und B sind $E_R(R/A)$ und $E_R(R/B)$ genau dann isomorph, wenn A und B *äquivalent* („related", Dlab [1]) sind, d.h. es existieren $s \notin A$ und $t \notin B$ mit $s^{-1}A = t^{-1}B$. Dabei ist $s^{-1}A = \{r \in R \mid sr \in A\}$. Wir schreiben dann $A \underset{R}{\sim} B$ oder auch kürzer: $A \sim B$.

Wie schon oben erwähnt, werden wir uns im folgenden auf die Klasse der Kettenringe und insbesondere der Duo-Kettenringe beschränken.

1. 1 Definition. 1. Ein Ring R, dessen Links- und Rechtsidealverband linear geordnet sind, heißt Kettenring.

2. Ein Ring R heißt Duo-Ring, wenn für alle $a \in R: Ra = aR$ ist.

Wir bemerken, daß Kettenringe lokale Ringe sind. Jedes endlich erzeugte Links-(Rechts-)Ideal ist Links-(Rechts-)Hauptideal. Offensichtlich ist jedes Links-(Rechts-)Ideal irreduzibel. R sei im folgenden stets ein Kettenring, A, B seien Rechtsideale von R.

1. 2 Lemma. *$A \sim B \Leftrightarrow p^{-1}A = B$ oder $A = q^{-1}B$ für ein $p \notin A$ bzw. $q \notin B$.*

Beweis. $\Rightarrow$: Es sei $s^{-1}A = t^{-1}B$ ($s \notin A$, $t \notin B$) und etwa $qs = t$. Dann ist $q \notin B$ und $sR \supset yR$ für $y \in A \cup (q^{-1}B)$, also $y = sv$ für ein $v \in R$. Hieraus folgt durch leichte Rechnung $A = q^{-1}B$. $\Leftarrow$: klar wegen $1 \notin A \cup B$.

1. 3 Lemma. *Sind A, $B \neq (0)$, so gilt für $q \in R \backslash B$: $A = q^{-1}B \Leftrightarrow qA = B$.*

Beweis. $\Rightarrow$: Es ist $qA \subseteqq B$. Ist $x \in B$, so hat x die Form $x = qv$ ($v \in R$). Dabei ist $v \in q^{-1}B = A$, also $x \in qA$. $\Leftarrow$: Es ist $A \subseteqq q^{-1}B$. Gibt es ein $x \in (q^{-1}B) \backslash A$, so ist $qx = 0$ und daher $qA = B = (0)$. Widerspruch!

1. 4 Folgerungen. 1. $A \sim (0) \Rightarrow \exists\, t \in R: A = (Rt)^r$ (I^r der Rechtsannullator von $I = Rt$).

2. Für alle $a, b \in R: aR, bR \neq (0) \Rightarrow aR \sim bR$. Ist J das maximale Ideal von R, so gilt für alle $a, b \in R$: $aJ, bJ \neq (0) \Rightarrow aJ \sim bJ$.

3. Gilt für alle $a \in R$: $Ra \subseteqq aR$, so ist $qA = (qR)A$. Ist darüber hinaus A nicht endlich erzeugt, so ist $(qR)A = (qJ)A$.

Beweis von 1. 4. 3. Offensichtlich ist $qA \subseteqq (qR)A \subseteqq q(R \cdot A) \subseteqq qA$. Sind A und B außerdem nicht endlich erzeugt, so gibt es für $ra \in R \cdot A$ (r Einheit) $a_1 \in A$ und $s \in J$ mit $ra = a_1 s$. Aus der Zweiseitigkeit der Rechtsideale folgt $a_1 J \subseteqq J a_1$ ([7], Lemma 5. 5), was $R \cdot A = J \cdot A$ beweist.

2. Lokalisation in Kettenringen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit Quotientenringen von Kettenringen und stellen damit ein Hilfsmittel für spätere Beweise bereit. Wir beziehen uns dabei auf die Terminologie bei Stenström [6], Seite 86—90.

Existiert der Rechtsquotientenring $R[S^{-1}]$ eines Kettenringes R bezüglich einer multiplikativ abgeschlossenen Menge S, so ist auch $R[S^{-1}]$ ein Kettenring. Aufgrund der Links- und Rechtsvergleichbarkeit in R ist jedes Element in $R[S^{-1}]$ Bild oder Inverses eines Bildes von R.

Ist I ein Rechtsideal von R, so bezeichnen wir mit I^e das Erweiterungsideal von I in $R[S^{-1}]$, mit L^c das Verengungsideal eines Rechtsideals L von $R[S^{-1}]$ in R. Wie im kommutativen Fall gelten $I \subseteqq I^{ec}$, $I^e = I^{ece}$ und $L^{ce} \subseteqq L$, $L^c = L^{cec}$. Ferner gilt dann für Rechtsideale I_1, I_2 von R mit $I_j^e \neq R[S^{-1}]$:

$$I_1 \underset{R}{\approx} I_2 \Rightarrow I_1^e \underset{R[S^{-1}]}{\approx} I_2^e,\ I_1^{ec} \underset{R}{\approx} I_2^{ec}.$$

Im folgenden suchen wir nach hinreichenden Bedingungen für die Existenz von Rechtsquotientenringen. Dabei beschränken wir uns auf Duo-Kettenringe. Ohne die Bedingung der Zweiseitigkeit treten in den folgenden Beweisen meist unüberwindbare Schwierigkeiten auf.

2. 1 Satz. *Sei R ein Duo-Kettenring, dessen Primideale die Maximalbedingung erfüllen. Dann gilt für alle Primideale P und alle Elemente $a \in R$: $Pa = aP$.*

Beweis. Da R ein Duo-Ring ist, ist jedes Primideal vollständig. Für $a \in R$ betrachten wir $\mathfrak{S}_a = \{P \mid P \text{ Primideal und } Pa \neq aP\}$.

Annahme. $\mathfrak{S}_a \neq \emptyset$. Dann besitzt $\mathfrak{S}_a$ ein maximales Element Q, d.h. $Qa \neq aQ$, etwa $Qa \subset aQ$, insbesondere also $aQ \neq (0)$. Man setze $Q_1 = \{x \mid xa \in aQ\}$. Offensichtlich ist Q_1 Linksideal und, da R Duo-Ring ist, ein Ideal. Ferner ist $aQ = Q_1 a$. Seien $s, t \notin Q_1$, also $sa = as_1$, $ta = at_1$ mit $s_1, t_1 \in R \backslash Q$. Wäre $as_1 t_1 = sat_1 = sta$ aus $Q_1 a = aQ$, so wäre wegen $s_1 t_1 \notin Q$ (also $Q \subset s_1 t_1 R$) $as_1 t_1 = 0$ und daher $aQ = (0)$. Widerspruch! Es ist also $st \notin Q_1$ und Q_1 ein Primideal. Es gilt $Q \subset Q_1$, denn sonst hätten wir $aQ = Q_1 a \subseteqq Qa \subset aQ$. Andererseits ist Q_1 Element von $\mathfrak{S}_a$, denn $Q_1 a = aQ_1 = aQ$ hätte $aQ = (0)$ zur Folge. Daher ist die Annahme $\mathfrak{S}_a \neq \emptyset$ falsch und die Behauptung bewiesen.

2. 2 Folgerungen. R erfülle die Voraussetzungen von 2. 1. P sei ein Primideal von R und $S = R \backslash P$. Dann gilt:

1. S ist „right reversible" [6]. Da R Kettenring ist, erfüllt S offensichtlich die Rechts-Ore-Bedingung. Daher existiert $R[S^{-1}] = R_P$ und ist ein Duo-Kettenring.

2. Für alle $a \in R$ ist $Sa = aS$.

Daß S „right reversible" ist, ergibt sich folgendermaßen: $a \neq 0$. Es sei $sa = 0$ ($s \in S$). Dann ist wegen Satz 2. 1 $aP = Pa = (0)$.

Annahme. $0 \notin aS$. Dann ist $P_1 = \{t \in R \mid ta \notin aS\} = \{t \in R \mid ta = 0\}$ ein Primideal von R und daher $aP_1 = P_1 a = (0)$. Wegen $s \in P_1$ ist $as = 0$, also $0 \in aS$. Widerspruch! Also ist $at = 0$ für ein $t \in S$.

2. 3 Definition. Für ein (zweiseitiges) Ideal I setzen wir

$$S_l(I) = \{s \mid \forall\, t \in R:\ st \in I \Rightarrow t \in I\}$$

$$S_r(I) = \{s \mid \forall\, t \in R:\ ts \in I \Rightarrow t \in I\}.$$

Man beachte, daß $S_l(I) = \{s \mid s^{-1} I = I\}$ bzw. $S_r(I) = \{s \mid Is^{-1} = I\}$ ist. $S_l(I)$ und $S_r(I)$ sind multiplikativ abgeschlossen und für $I \neq R$ ist $I \cap S_l(I) = \emptyset$ bzw. $I \cap S_r(I) = \emptyset$. Ist R ein Kettenring, so ist $R \backslash S_l(I)$ $(R \backslash S_r(I))$ ein Links-(Rechts-)Ideal.

Es gilt noch mehr:

2. 4 Lemma. *Für Ideale I eines Kettenringes R ist $R \backslash S_l(I)$ $(R \backslash S_r(I))$ stets ein vollständiges Primideal.*

Beweis. Wir setzen $R\backslash S_l(I)=P$. Damit bleibt zu zeigen: P ist Rechtsideal, d.h. für alle $x\in P$, $r\in R$ liegt xr in P. Ist $xr=r_1x$ ($r_1\in R$), so sind wir fertig. Im anderen Fall gibt es $r_2\in R$ mit $r_2xr=x$. Ist $r_2\in S_l(I)$, so ist sicher $xr\in P$. Ist $r_2\notin S_l(I)$, dann gibt es $t\notin I$ mit $r_2t\in I$. Wir vergleichen nun t und xr^2. Sei $t=xr^2p_1$, $r_2t=r_2xrrp_1=xrp_1\in I$. Da $p_1\notin I$, sonst wäre $t\in I$, muß $xr\notin S_l(I)$ sein, also $xr\in P$. Ist dagegen $tp_2=xr^2$ für ein $p_2\in R$, so haben wir $r_2tp_2=r_2xrr=xr\in I$. Mit $I\cap S_l(I)=\emptyset$ folgt $xr\in P$.

2. 5 Folgerungen. 1. Ist P vollständiges Primideal in R, so ist $R\backslash S_l(P)=R\backslash S_r(P)=P$.

2. Ist R Duo-Kettenring, so ist $R\backslash S_r(I)$ das tertiäre Radikal von $(R/I)_R$.

3. Unter den Voraussetzungen von 2. 1 ist für jedes Ideal I stets $S_l(I)=S_r(I)$. Mit $R\backslash S_l(I)=R\backslash S_r(I)=P$ ist $S_l(I^e)=S_r(I^e)=U(R_P)$. Dabei ist $U(R_P)$ die Einheitengruppe von R_P.

4. Für $(0)\neq I_0:=\{y\mid \exists\, t\in S_r(I): yt=0\}$ ist $S_r(I_0)=S_r(I)$.

5. Ist R Kettenring, so gilt stets, falls $xR, xJ\neq(0)$ (J maximales Ideal von R), $S_r(xR)=S_r(xJ)=U(R)$.

Den P-Abschluß des Rechtsideals I von R bezeichnen wir mit $\mathrm{cl}_P(I)$. Man beachte: $\mathrm{cl}_P(I)=I^{ec}$.

2. 6 Lemma. *R erfülle die Voraussetzungen von 2. 1. Es sei I ein Ideal und R_P der Rechtsquotientenring von R bzgl. $P=R\backslash S_r(I)$. Dann gelten folgende Aussagen:*

1. $(0)\neq I^e=\varphi(a)\,P^e \Rightarrow I=\mathrm{cl}_P(aP)=aP$.

2. $(0)\neq I^e=\varphi(a)\,R_P \Rightarrow I=\mathrm{cl}_P(aR)$.

Dabei ist $\varphi: R\longrightarrow R_P$ der kanonische Homomorphismus.

Beweis. Wegen $P=R\backslash S_r(I)$ ist $I^{ec}=I$. 1. Offensichtlich ist $aP\subseteqq I^{ec}$. Sei nun $x\in I^{ec}$, also $xs-ap\in\ker\varphi$ für ein $s\in S_r(I)$ und $p\in P$. Es ist $(x-ap')s\in\ker\varphi$, also $x-ap'\in\ker\varphi$ und aufgrund von $I^e\neq(0)$ auch $\ker\varphi\subset aP$, d.h. $x\in aP$. Man rechnet nun leicht nach, daß $\mathrm{cl}_P(aP)=aP$ ist.

2. Der Beweis von 2. verläuft ähnlich wie in 1.

3. Kettenringe mit einem Primideal

Wir behandeln nun den zentralen Fall der Isomorphietypen von unzerlegbaren, injektiven Moduln über Kettenringen mit einem Primideal. Der allgemeine Fall läßt sich dann mit Hilfe der Lokalisation aufgrund dieser Ergebnisse behandeln.

3. 1 Lemma. *Sei R ein Kettenring mit einem Primideal. Dann ist jede Nichteinheit Nullteiler und nilpotent und R ist ein Duo-Ring.*

Zum Beweis von $Ra\subseteqq aR$ beachte man, daß $ras=a$ mit $s\in J$ (J maximales Ideal) wegen der Nilpotenz der Nullteiler und $r^nas^n=a$ für alle n stets $a=0$ zur Folge hat.

Ist das maximale Ideal J endlich erzeugt, so ist R ein lokaler einreihiger Artin-Ring. R_R ist dann der einzige unzerlegbare, injektive R-Modul.

Im folgenden beschäftigen wir uns mit dem Fall, daß J nicht endlich erzeugt ist. Dann ist sicher $J^2 = J$. Wir betrachten nun die Halbgruppe der Ideale vom Typ xJ, die nicht endlich erzeugt sind, zusammen mit dem Nullideal. Wir setzen:

$$\Gamma = \{xJ \mid x \in R\}.$$

3. 2 Lemma. *J sei einziges Primideal von R. Dann hat Γ folgende Eigenschaften:*

1. *Γ ist bezüglich der Idealmultiplikation $aJ \circ bJ \underset{\text{def}}{=} aJbJ$ $(=abJ)$ und $aJ \leqq bJ \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} bJ \subseteqq aJ$ linear geordnete Halbgruppe.*

2. *Γ ist natürlich geordnet.*

3. *Γ ist archimedisch.*

4. *Γ besitzt ein maximales Element $\infty \underset{\text{def}}{=} (0)$.*

5. *Es gelten in Γ die (schwachen) Kürzungsregeln:*

$$\alpha \circ \beta = \alpha \circ \delta \neq \infty \Rightarrow \beta = \delta$$

$$\beta \circ \alpha = \delta \circ \alpha \neq \infty \Rightarrow \beta = \delta.$$

Bezüglich Begriffen aus der Theorie der linear geordneten Halbgruppen, siehe Fuchs [2], Seite 215—230.

Beweis. 1. Wegen $J^2 = J$ und $Jx = xJ$ für alle $x \in R$ ist $aJ \circ bJ = aJbJ = abJ^2 = abJ$. Mit $aJ \leqq bJ \Leftrightarrow bJ \subseteqq aJ$ gilt $aJ \leqq bJ \Leftrightarrow \exists\, t \in R$: $tJaJ = bJ$. Daher ist Γ Halbgruppe und linear geordnet. Ferner sind die Monotoniegesetze erfüllt: $aJ \leqq bJ \Rightarrow xJ \circ aJ \leqq xJ \circ bJ$ bzw. $aJ \leqq bJ \Rightarrow aJ \circ xJ \leqq bJ \circ xJ$. Das neutrale Element in Γ ist $\varepsilon = J = 1 \cdot J$.

2. Wegen $xJ \leqq JxJ$ ist Γ positiv geordnet. Aus der Eigenschaft, daß die Links- und Rechtsideale linear geordnet sind, folgt: Γ ist links-(rechts-)natürlich geordnet.

3. Ist $(xJ)^n = x^n J < yJ$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so muß wegen der Nilpotenz der Nullteiler x eine Einheit in R sein, also $xJ = \varepsilon$.

4. Offensichtlich ist $\infty = (0)$ maximales Element in Γ.

5. Sei $(0) \neq aJbJ = abJ = acJ = aJcJ$. Dann gibt es eine Einheit r mit $abr = ac$. Wäre $bs = c$ mit $s \in J$, so erhielte man $abr = abs$, wobei, wegen $s \in J$ und $r \in U$, $ab = 0$ wäre. Widerspruch! Analog verfährt man mit $(0) \neq bJaJ = cJaJ \Rightarrow bJ = cJ$.

Mit einem Satz von Hölder [2], Seite 228 erhält man, da das maximale Element von Γ keinen unteren Nachbarn besitzt:

3. 3 Folgerungen. Γ ist einer Unterhalbgruppe der reellen Zahlen im Intervall $[0, 1]$ mit der üblichen Anordnung und mit $\alpha \circ \beta = \min\{\alpha + \beta, 1\}$ ordnungs- und verknüpfungsisomorph, also insbesondere kommutativ.

Mit 3. 3 gibt es einen injektiven Morphismus w: $\Gamma \to [0, 1]$, wobei $w(\varepsilon) = 0$ und $w(\infty) = 1$ sind.

3. 4 Lemma. *Die Menge Γ_1 aller nicht endlich erzeugten Rechtsideale von R einschließlich* (0) *ist ordnungs- und verknüpfungsisomorph zu der Halbgruppe der reellen Zahlen* $[0, 1]$.

Beweis. Da J nicht endlich erzeugt ist, liegt $w(\Gamma)$ dicht in $[0,1]$: Sind $0 \neq \alpha < \beta$ reelle Zahlen aus $[0,1]$, so gibt es $0 \neq \alpha_1 \in w(\Gamma)$ mit $\alpha_1 < \alpha < \beta$. Man wähle $\delta \in w(\Gamma)$ mit $0 < \delta < \min\{|\beta - \alpha|, |\alpha - \alpha_1|\}$. Sei $w(xJ) = \alpha_1$ und $w(yJ) = \delta$. Da Γ archimedisch ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\alpha < w(xJ \circ (yJ)^n) < \beta$, daher ist mit $\gamma = w(xy^n J)$ stets $\alpha < \gamma < \beta$, was die Dichtheit von $w(\Gamma)$ in $[0,1]$ belegt. Nun bilden wir für jede reelle Zahl $\alpha \in [0,1]$

$$I_\alpha = \bigcup_{\alpha \leqq w(xJ)} xJ.$$

Es ist $I_\alpha \neq (0)$ genau dann unterer Nachbar bzgl. $\subseteqq$, also vom Typ yJ für ein $y \in R$, wenn $\alpha \in w(\Gamma)$ ist. $I_\alpha \neq (0)$ ist ferner stets nicht endlich erzeugt: Wäre $(0) \neq I_\alpha$ endlich erzeugt, also $I_\alpha = xR$ für ein $x \in R$, so hätten wir $\alpha < w(xJ)$ und es gäbe

$$yJ \supset xJ \text{ mit } \alpha < w(yJ) < w(xJ),$$

was wegen $xR \subset yJ \subset I_\alpha$ zu einem Widerspruch führt.

Jedes nicht endlich erzeugte Ideal I ist aber von der Form I_α für ein $\alpha \in [0,1]$, wobei $\alpha = \inf\{w(xJ) | x \in I\}$ ist, wie man leicht nachrechnet. Wir setzen $w_1(I_\alpha) = \alpha$ und erhalten damit eine ordnungstreue Bijektion w_1 von Γ_1 auf $[0,1]$ mit $w_{1|\Gamma} = w$, d. h. w_1 ist ein Halbgruppenisomorphismus:

Trivialerweise ist $I_\alpha \circ I_\beta \subseteqq I_{\alpha \circ \beta}$. Sei nun $0 \neq z \in I_{\alpha \circ \beta}$. Also ist $z \in xJ$ mit $\alpha \circ \beta \leqq w(xJ)$. Mit $zJ \subset xJ$ gibt es $\gamma \in w(\Gamma)$, so daß $\alpha \circ \beta < \gamma < w(zJ)$ ist. Ferner existiert $\delta \neq 0$ mit $\delta \circ \alpha \circ \beta = \alpha \circ \beta \circ \delta = \gamma$. Wir wählen $\alpha_1, \beta_1 \in w(\Gamma)$ mit $\alpha < \alpha_1 \leqq \alpha \circ \dfrac{\delta}{2}$ und $\beta < \beta_1 \leqq \beta \circ \dfrac{\delta}{2}$. Seien aJ, bJ die zu α_1, β_1 gehörigen Ideale, so ist $zJ \subset aJbJ \subset I_\alpha \circ I_\beta$, also $z \in I_\alpha \circ I_\beta$. Damit ist 3. 4 bewiesen.

Man beachte, daß wegen 1. 3 und 1. 4 für Ideale $(0) \neq I_1, I_2 \in \Gamma_1$ gilt:

$$I_1 \sim I_2 \Leftrightarrow \exists\, \alpha \in w(\Gamma)\colon w_1(I_1) \circ \alpha = w_1(I_2)$$

oder

$$\exists\, \beta \in w(\Gamma)\colon w_1(I_2) \circ \beta = w_1(I_1).$$

Nehmen wir nun an, daß ein Kettenring mit einem Primideal $n+1$ Isomorphietypen von unzerlegbaren, injektiven Moduln besitzt. Dann werden n Typen durch nicht endlich erzeugte Ideale induziert. Weiter können wir davon ausgehen, daß in jedem beliebig kleinen Intervall Werte unter w_1 von Idealen aller Äquivalenzklassen bzgl. $\sim$ liegen.

Wir betrachten nun das Intervall $\left[0, \dfrac{1}{2n!}\right)$. Sei I ein Ideal mit $w_1(I) \in \left(0, \dfrac{1}{2n!}\right)$. Dann ist, da nach Voraussetzung R nur endlich viele Isomorphietypen besitzen soll, $I^{n+1} \sim I^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ mit $1 \leqq k \leqq n$, also gibt es $\alpha \in w(\Gamma)$ mit $w_1(I^k) \circ \alpha = w_1(I^{n+1})$, andererseits aber auch $w_1(I^k) \circ w_1(I^{n-k+1}) = w_1(I^{n+1})$. Mit 3. 2. 5 erhalten wir

$$w_1(I^{n-k+1}) = \alpha \in w(\Gamma).$$

Somit existiert zu jedem Ideal I eine Potenz $I^l (l \leqq n)$, so daß $I^l \sim J$. Man beachte $(0) \neq (I^l)^m \sim J$, insbesondere also $I^{n!} \sim J$. Daher ist

$$\left[0, \frac{1}{2}\right) = w_1\left\{I^{n!} | w_1(I) \in \left[0, \frac{1}{2n!}\right)\right\} \subseteqq w(\Gamma),$$

also gilt $w(\Gamma) = [0,1]$, d. h. $w_1 = w$. Da stets nun (unter obiger Annahme) $w_1(I) \in w(\Gamma)$ ist, sind sämtliche nicht endlich erzeugten Ideale untere Nachbarn! Untere Nachbarn sind zueinander äquivalent (1. 4. 2), also haben die oben betrachteten R-Moduln genau zwei Isomorphietypen. Wir fassen zusammen:

3. 5 Satz. *Sei R ein Kettenring mit einem Primideal und sei dieses nicht endlich erzeugt. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *R besitzt (höchstens) endlich viele Isomorphietypen von unzerlegbaren, injektiven Moduln.*

b) $\Gamma \cong [0, 1]$.

c) *Jedes nicht endlich erzeugte Rechtsideal ist unterer Nachbar.*

Daß es genau zwei Isomorphietypen gibt, folgt dann mit c) und 1. 4. 2. Für Kettenringe mit einem Primideal, das zudem endlich erzeugt ist, gelten offensichtlich ebenfalls die Aussagen a) und c) von Satz 3. 5.

4. Kettenringe mit mehr als einem Primideal

Wir stellen uns nun die Frage: Wann besitzen beliebige Duo-Kettenringe nur endlich viele Isomorphietypen von unzerlegbaren, injektiven Moduln?

Daß wir uns auf Kettenringe mit endlich vielen Primidealen beschränken können, zeigt folgendes Lemma:

4. 1 Lemma. *Sei R Duo-Kettenring und I_1, I_2 Ideale. Dann gilt:*

$$I_1 \sim I_2 \Rightarrow S_r(I_1) = S_r(I_2).$$

Beweis. Nach 2. 5. 2 ist $R \backslash S_r(I_1)$ tertiäres Radikal von $(R/I_1)_R$. Nach Voraussetzung ist $E_R(R/I_1) \cong E_R(R/I_2)$, also

$$R \backslash S_r(I_1) = \operatorname{ter}(R/I_1) = \operatorname{ter}(E_R(R/I_1)) = \operatorname{ter}(E_R(R/I_2)) = \operatorname{ter}(R/I_2) = R \backslash S_r(I_2).$$

Die Umkehrung von 4. 1 gilt nicht, wie Satz 3. 5 zeigt.

4. 2 Hauptsatz. *Für einen Duo-Kettenring R sind folgende Aussagen äquivalent:*

a) *R besitzt endlich viele Isomorphietypen von unzerlegbaren, injektiven Moduln.*

b) *R hat endlich viele Primideale und jedes Ideal $\neq (0)$ ist P-Abschluß von aP bzw. bR für geeignete $a, b \in R$. Dabei ist $P = R \backslash S_r(I)$ tertiäres Radikal von $(R/I)_R$.*

Ist eine der beiden Aussagen von 4. 2 erfüllt und hat R genau n Primideale, so besitzt R mindestens n, höchstens $2n$ Isomorphietypen von unzerlegbaren, injektiven Moduln.

Beweis von 4. 2. a) $\Rightarrow$ b) Mit 4. 1 kann R höchstens endlich viele Primideale besitzen, da verschiedene Primideale verschiedene Typen induzieren. Seien

$$J = P_1 \supset P_1 \supset \cdots \supset P_{n-1} \supset P_n$$

sämtliche Primideale von R und I ein nicht endlich erzeugtes Rechtsideal, nach Voraussetzung also ein Ideal.

1. $S_r(I) = U(R)$ und P_i sei kleinstes I enthaltendes Primideal. Ist $P_i = I = J$, so sind wir fertig. Mit $I \neq J$ ist $P_i \neq I$. Sei $t \in J \backslash (P_2 \cup I)$ und $I_1 \underset{\text{def}}{=} t^{-1} I$. Wäre $I_1 \subseteqq I$, so hätten wir mit $tz \in I$ stets $z \in I$, also $t \in S_l(I) = S_r(I)$ (2. 5. 3!), d.h. $t \in U(R)$. Widerspruch! Somit ist $I \subset I_1 \subseteqq P_i$. Wir wählen nun $s \in I_1 \backslash I$ und setzen $I_2 \underset{\text{def}}{=} s^{-1} I$. Es ist $ts \in I$ und mit 2. 2. 2 $ts = st_1$ für ein $t_1 \in R \backslash P_2$. Wegen $t_1 \in I_2$ folgt $P_2 \subset I_2 \subset P_1$ und $I \subset I_2$, ferner aber auch

$I \sim I_1 \sim I_2$. Wir wählen I_3 mit $P_2 \subset I_3 \subset I_2$. Dann ist $T \underset{\text{def}}{=} R/I_3$ Kettenring mit einem Primideal, so daß ein T-Modul nur endlich viele der betrachteten Isomorphietypen besitzen kann. Nach 3. 5 ist daher I_2 unterer Nachbar, also $I_2 = xJ$ und damit auch $I = sxJ$, d. h. $I = a(R \backslash S_r(I)) = aJ$ für $a = sx \in R$.

2. Sei nun $S_r(I) = R \backslash P$. Mit 2. 2. 1 existiert R_P und ist ein Duo-Kettenring, in dem $S_r(I^e) = U(R_P)$ gilt. R_P kann nach Voraussetzung ebenfalls nur endlich viele Isomorphietypen besitzen. Mit Teil 1 des Beweises ist, falls $I^e \neq (0)$ ist, I^e Rechtshauptideal oder unterer Nachbar in R_P, also hat I nach 2. 6 die in der Behauptung geforderte Form. Ist dagegen $I^e = (0)$ und $I \neq (0)$, so ist $I = \{y \mid \exists\, t \in S_r(I) : yt = 0\} = \mathrm{cl}_P(0)$, was die Behauptung beweist.

b) $\Rightarrow$ a) Sind $I_1, I_2 \neq (0)$ Ideale, die die Darstellungen

$$I_1 = a(R \backslash S_r(I_1)) \qquad \text{bzw.}$$
$$I_2 = b(R \backslash S_r(I_2))$$

haben, so ist mit 4. 1 stets $S_r(I_1) = S_r(I_2)$ notwendig für $I_1 \sim I_2$. Und daraus, daß $Ra \subseteqq Rb$ oder $Rb \subseteqq Ra$ gilt, folgt, daß $S_r(I_1) = S_r(I_2)$ auch hinreichend für $I_1 \sim I_2$ ist.

Sind $I_1, I_2 \neq (0)$ Ideale, die die Darstellungen

$$I_1 = \mathrm{cl}_{P_1}(aR) \quad \text{bzw.}$$
$$I_2 = \mathrm{cl}_{P_2}(bR) \quad \text{mit} \quad a, b \neq 0 \quad \text{und} \quad P_i = R \backslash S_r(I_i)$$

haben, so ist, wiederum mit 4. 1, $P_1 = P_2$ notwendig für $I_1 \sim I_2$. Wegen $aR \sim bR$ ist dies auch hinreichend.

Die bis jetzt betrachteten Ideale induzieren, falls R genau n Primideale hat, mindestens n, höchstens $2n$ Isomorphietypen. Daß $2n$ schon Maximalzahl ist, zeigen folgende Überlegungen: Ist $I = (0)$, so ist lediglich der Fall, daß R kein Primring ist, offen. Dann besitzt R Rechtsnullteiler und es gilt mit 1. 4. 1 $(0) \sim (Rv)^r \neq (0)$ für ein $v \in R$. Damit bleibt lediglich der Fall $(0) \neq I = \mathrm{cl}_P(0)$ mit $P = R \backslash S_r(I)$ zu betrachten. Wegen $I \neq (0)$ besitzt R Rechtsnullteiler, d. h. $(0) \sim (Rv)^r$ mit $v \in P \backslash I \neq \emptyset$. Dann ist $\mathrm{cl}_P(0) = I \sim \mathrm{cl}_P((Rv)^r) \neq I$. Also muß $\mathrm{cl}_P((Rv)^r)$ eine der oben betrachteten Darstellungen haben und der durch I induzierte Isomorphietyp wurde bereits erfaßt.

Damit erzeugen Ideale I mit $R \backslash S_r(I) = P$ für ein festes Primideal P unter den Voraussetzungen von 4. 2 b) höchstens 2 Isomorphietypen.

Bemerkungen. 1. Der Beweis zeigt ferner, daß Ideale I mit $S_r(I) = R \backslash P$ für ein Primideal P eines Duo-Kettenringes unendlich viele Typen von unzerlegbaren, injektiven Moduln induzieren, wenn sie schon mehr als zwei Typen induzieren. Im Falle, daß die Primideale des Kettenringes R nicht mehr die Maximalbedingung erfüllen, genügt es, zusätzlich zu fordern: R_P ist Duo-Kettenring und P besitzt im Primidealverband einen unteren Nachbarn.

2. Nullteilerfreie Duo-Kettenringe sind offensichtlich gerade die klassischen (nicht notwendig kommutativen) Bewertungsringe. Ein Bewertungsring mit n Primidealen besitzt daher entweder höchstens $2n-1$ oder unendlich viele Isomorphietypen der betrachteten Moduln.

3. Die in 4. 2 betrachteten Duo-Kettenringe lassen sich als verallgemeinerte Halbgruppenringe über epimorphen Bildern des Positivteils der lexikographisch geordneten Gruppe $\mathbb{R}^n$ konstruieren [7].

Literaturverzeichnis

[1] *V. Dlab*, Rank theory of modules, Fund. Math. **64** (1969), 313—324.
[2] *L. Fuchs*, Teilweise geordnete algebraische Strukturen, Göttingen 1966.
[3] *W. Klingenberg*, Desarguessche Ebenen mit Nachbarelementen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **20** (1955), 97—111.
[4] *J. Lambek*, Lectures on rings and modules, Waltham, Toronto, London 1966.
[5] *E. Matlis*, Injective modules over Noetherian rings, Pacific J. Math. **8** (1958), 511—528.
[6] *B. Stenström*, Rings and modules of quotients, Lecture Notes on Mathematics **237** (1971).
[7] *G. Törner*, Eine Klassifizierung von Hjelmslev-Ringen und Hjelmslev-Ebenen, Mitt. Math. Sem. Gießen **107** (1974).

Arbeitsgruppe Fachdidaktik im Fachbereich Mathematik
Technische Hochschule, Schloßgartenstr. 7, 6100 Darmstadt

Eingegangen 21. März 1974