Math. Z. 154, 189–201 (1977)

Mathematische Zeitschrift

(r^{n-1}, r) Hjelmslev-Ebenen des Typs n

Günter Törner*

Fachbereich Mathematik, Technische Hochschule, Schloßgartenstr. 7, D-6100 Darmstadt, Bundesrepublik Deutschland

Herrn Günter Pickert zum 60. Geburtstag gewidmet

Ausgehend von den von Craig [11] bzw. Lüneburg [12] untersuchten uniformen Hjelmslev-Ebenen wurden 1969/70 unabhängig voneinander von Artmann [1, 2] und Drake [4] zwei Klassen rekursiv definierter *projektiver Hjelmslev-Ebenen* (PH-*Ebenen*) bzw. *affiner Hjelmslev-Ebenen* (AH-*Ebenen*) eingeführt bzw. konstruiert: die Hjelmslev-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaften bzw. die n-uniformen Hjelmslev-Ebenen.

Das vom Autor in [9] vorgeschlagene Konzept, *Kongruenzrelationen* und deren Parameter als Klassifizierungsschema zu benutzen, erlaubt es nun, die unterschiedlichen Begriffsbildungen von einem gemeinsamen Bezugspunkt aus zu untersuchen. Dadurch kann insbesondere die Notwendigkeit als auch die interne Abhängigkeit verschiedener Zusatzbedingungen in den bei Artmann und Drake behandelten Ebenen erörtert werden, wobei sich ein Teil der zusätzlichen Forderungen in endlichen Ebenen als überflüssig erweist. Im wesentlichen stellt sich heraus, daß die von Artmann und Drake diskutierten Ebenen Hjelmslev-Ebenen (H-Ebenen) des Typs n sind, deren sämtliche Stufenparameter (s. (2)) gleich der Ordnung r der zugeordneten affinen bzw. projektiven Ebene sind, kurz (r^{n-1}, r) H-Ebenen des Typs n sind.

Im 1. Abschnitt geben wir eine geometrische Kennzeichnung des Falles, daß ein Stufenparameter einer (t, r) H-Ebene gleich r ist.

"*Property* A" [4] bzw. das *Axiom reziproker Strecken* sind äquivalente Bedingungen an eine H-Ebene des Typs n. Insbesondere werden PH-/AH-Ebenen der Höhe n schon durch die numerische Bedingung $t=r^{n-1}$ charakterisiert (Kap. 2).

Mit den Ergebnissen des 2. Kapitels beweisen wir im 3. Abschnitt, daß die Definitionen einer H-Ebene der Höhe n, einer H-Ebene n-ter Stufe, einer H-Ebene des Typs n mit dem *Axiom reziproker Strecken* bzw. „*Property* A“ gleichwertige Begriffe kennzeichnen.

---

* Der Autor dankt der Stiftung Volkswagenwerk für die Unterstützung während der Abfassung dieser Arbeit

0. Vorbemerkungen, grundlegende Definitionen und Sätze

Die in dieser Arbeit betrachteten Inzidenzstrukturen sind grundsätzlich endlich.

Die Definitionen für *fastaffine*, *affine* und *projektive Hjelmslev-Ebenen* (kurz: FAH- bzw. AH- bzw. PH-*Ebenen*) findet der Leser in [6].

Wir sprechen von H-Ebenen, wenn die diesbezüglichen Aussagen in allen drei Klassen gelten. Wie üblich bezeichnet (t, r) das zu einer H-Ebene gehörige Parameterpaar; elementare Eigenschaften, die t bzw. r betreffen, entnehme man [6, Satz 5].

Zentrale Bedeutung für diese Arbeit kommt dem Konzept der *Kongruenzrelationen* zu, was wir in [9] für den projektiven Fall entwickelt und in [10] auf affine H-Ebenen übertragen haben. Die Definition für Kongruenzrelationen in PH-Ebenen findet der Leser auch in [7]. Da einerseits die naheliegende Verallgemeinerung dieses Begriffes für FAH-Ebenen bisher noch nicht in der Literatur zu finden ist, andererseits wir uns, wie oben schon erwähnt, auf endliche Strukturen beschränken werden, scheint es angebracht, die Definitionen hier kurz aufzuführen, wobei wir die in [10] gegebene Definition leicht modifizieren, um lästige Zusatzbedingungen zu vermeiden.

0.1. **Definition.** Es sei τ eine Äquivalenzrelation in der Punktmenge $\mathscr{P}$ einer FAH-Ebene $\mathscr{H}=(\mathscr{P}, \mathscr{G}, \in)$. Ferner setzen wir:

$$g \tau h \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \forall P \in g \ \exists Q \in h \\ \forall P \in h \ \exists Q \in g \end{matrix}\right\} P \tau Q$$

heißt *Kongruenzrelation* (K-*Rel.*), falls gelten:

(AK 1) $\tau \subseteq \sim$.

(AK 2) $u(P, g) = |\{h \mid P \in g, h, g \tau h\}|$ ist unabhängig von der Wahl der Fahne (P, g).

(AK 3) Für alle $P, Q, R \in \mathscr{P}$: $P \tau Q,\ P \nsim R \Rightarrow PR \tau QR$.

(AK 4) Für alle $g, h, k \in \mathscr{G}$:

$$g \tau h,\ |g \cap k| = 1,\ |g \cap h| > 1 \Rightarrow g \cap k \,\tau\, h \cap k.$$

(AK 5) Für alle $P \in \mathscr{P}$, $g, h \in \mathscr{G}$:

$$P \in g, h,\ g \sim h,\ \neg (g \tau h) \Rightarrow \exists\, Q \in \mathscr{P}\colon \neg (Q \tau \mathscr{P}) \quad \text{mit } g \tau Q \tau h.$$

Mit $u(P, g) = u_\tau$ bezeichnen wir die τ zugeordnete Invariante der K-Rel. τ.

0.2. **Definition.** Es sei $\mathscr{H} = (\mathscr{P}, \mathscr{G}, \in, \|)$ eine AH-Ebene und τ K-Rel. der FAH-Ebene $\mathscr{H} = (\mathscr{P}, \mathscr{G}, \in)$. τ heißt *Kongruenzrelation* (K-*Rel.*) der AH-Ebene $\mathscr{H}$, falls (außer (AK 1)–(Ak 5)) gelten:

(AK 6) Für alle $P, Q \in \mathscr{P}$, $g, h \in \mathscr{G}$:

$$P \tau Q,\ P \in g,\ Q \in h,\ g \| h \Rightarrow g \tau h.$$

(AK 7) Für alle $P, Q \in \mathscr{P}$, $g_1, g_2, h_1, h_2 \in \mathscr{G}$:

$$P \in g_1, g_2,\ Q \in h_1, h_2,\ g_i \| h_i\ (i = 1, 2),\ g_1 \tau g_2 \Rightarrow h_1 \tau h_2.$$

0.3 *Bemerkungen.* 1. Aus den Eigenschaften einer K-Rel. τ folgen:

(a) $g \tau h$, $|g \cap k| = 1$, $|g \cap h| = 0 \Rightarrow g \cap k \tau h \cap k$,

(b) $P_1, P_2 \in g$, $Q_1, Q_2 \in h$, $P_1 \nsim P_2$, $P_i \tau Q_i \Rightarrow g \tau h$.

2. Ist τ K-Rel. einer (t, r) FAH-Ebene $\mathscr{H}$ $(r \neq 2)$ bzw. einer (t, r) AH-Ebene, so ist (AK 2) eine Folge der übrigen Forderungen an eine K-Rel.

Für die Invariante u_τ einer K-Rel. erhält man ähnliche Eigenschaften wie für den Parameter t einer H-Ebene. Der Beweis verläuft analog zu [6, Satz 5].

0.4 **Lemma.** *Es sei $\mathscr{H}$ eine* H-*Ebene und τ eine* K-*Rel. mit der Invarianten $u_\tau = u$. Dann gelten für beliebige Fahnen* (P, g)

(a) $u = |\{Q \mid P \tau Q, P, Q \in g\}|$,

(b) $u^2 = |\{Q \mid P \tau Q\}|$,

(c) $u^2 = |\{h \mid g \tau h\}|$.

Die Bedeutung der K-Rel. liegt im wesentlichen in ihrer Verbindung zu Morphismen von H-Ebenen, wobei sich die K-Rel. als deren „Kerne" herausstellen.

0.5 **Definitionen.** Seien $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ H-Ebenen und φ eine inzidenzerhaltende, surjektive Abbildung der Punkt- bzw. Geradenmengen von $\mathscr{H}_1$ bzw. $\mathscr{H}_2$.

φ heißt H-*Epimorphismus*, falls

$$P \sim Q \Leftrightarrow \varphi(P) \sim \varphi(Q),$$

$$g \sim h \Leftrightarrow \varphi(g) \sim \varphi(h)$$

und im Falle, daß $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ AH-Ebenen sind,

$$g \parallel h \Rightarrow \varphi(g) \parallel \varphi(h)$$

gelten.

Der einfache Beweis des folgenden Satzes („Isomorphiesätze für H-Ebenen") bleibt dem Leser überlassen.

0.6. **Satz.** *Es seien $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$* H-*Ebenen und $\varphi: \mathscr{H}_1 \to \mathscr{H}_2$ ein* H-*Epimorphismus. Dann gelten:*

(a) *Durch*

$$P \tau_\varphi Q \Leftrightarrow \varphi(P) = \varphi(Q)$$

wird eine K-*Rel. τ_φ in $\mathscr{H}_1$ definiert, die wir Kern von φ nennen.*

(b) *Der Kern bestimmt das Bild (bis auf Isomorphie), d.h. $\mathscr{H}_2 \cong \mathscr{H}_{1/\tau}$.*

(c) *Es gibt eine isotone Bijektion der Menge der* K-*Rel. μ mit $\tau_\varphi \subseteq \mu \subseteq \sim$ in die Menge der* K-*Rel. von $\mathscr{H}_2$.*

Von fundamentaler Bedeutung ist nun das folgende Ergebnis:

0.7. **Hauptsatz.** *Die Menge der* K-*Rel. einer* H-*Ebene ist durch Inklusion linear geordnet.*

Den Beweis für K-Rel. in PH-Ebenen findet man in [9], während der Nachweis für AH-Ebenen in [10] geführt wurde. Die Argumentation dort läßt sich auch auf FAH-Ebenen übertragen.

Somit bilden die K-Rel. einer H-Ebene $\mathscr{H}$ eine Kette. Wir numerieren diese wie folgt:

$$\mathrm{id} = (\sim n) \subset (\sim n-1) \subset \cdots \subset (\sim 1) = \sim . \tag{1}$$

Durch (1) sind in Verbindung mit 0.6 die epimorphen Bilder durch Projektion linear angeordnet.

$$\mathscr{H} = \mathscr{H}_n = \mathscr{H}_{/\sim n} \to \mathscr{H}_{/\sim n-1} \to \cdots \to \mathscr{H}_{/\sim 2} \to \mathscr{H}_{/\sim 1} = \bar{\mathscr{H}}. \tag{2}$$

Besitzt eine H-Ebene $\mathscr{H}$ genau n K-Rel., so heißt H-*Ebene des Typs n.*

Da die K-Rel. $(\sim i)$ Äquivalenzrelationen sind, gilt stets: u_{i+1} teilt u_i, so daß wir durch

$$q_{i+1} = u_i / u_{i+1} \tag{3}$$

eine Folge von Parametern q_{i+1}, die wir *Stufenparameter* nennen werden, erhalten. Dabei ist u_i die $(\sim i)$ zugeordnete Invariante. Ist $\mathscr{H}$ eine (t, r) H-Ebene des Typs n, so ist

$$t = q_2 \ldots q_n.$$

Die Frage nach dem Zusammenhang eines Stufenparameters q_{i+1} mit den vorangehenden $q_2, \ldots, q_i$ erscheint daher als wesentliches Problem für die Theorie der H-Ebenen.

Bevor wir uns in den nächsten Kapiteln dem Fall, daß ein oder sogar alle Stufenparameter einer (t, r) H-Ebene gleich r sind, verweisen wir noch auf Eigenschaften von K-Rel., die wir oft unzitiert verwenden werden.

Es sei

$$P(\simeq i)\,Q \Leftrightarrow P(\sim i)\,Q \quad \text{und} \quad \neg\,(P(\sim i+1)\,Q),$$

$$g(\simeq i)\,h \Leftrightarrow g(\sim i)\,h \quad \text{und} \quad \neg\,(g(\sim i+1)\,h)$$

und

$$P(\simeq i)\,g \Leftrightarrow \exists\, Q \in g:\; P(\simeq i)\,Q.$$

Es gilt: $P(\simeq i)\,g \Leftrightarrow \exists\, h \ni P: g(\simeq i)\,h.$

0.8. **Lemma.** *Es sei* $\mathscr{H}$ H-*Ebene und* $(\sim i)$, $(\sim j)$ K-*Rel. Dann gelten:*

(a) *Sei* $h \nsim k$, $R \in h \cap k$, $Q \in h \setminus k$: $Q(\simeq i)\,R \Leftrightarrow Q(\simeq i)\,k$ (s. auch [5, 1.12]).

(b) *Sei* $h \nsim k$, $R \in h \cap k$, $Q \in h \setminus k$, $Q(\simeq i)\,R$, $P, Q \in g$, $g \sim h$. *Dann gilt* $P(\simeq j)\,R$ *für ein* $j \leqq i$.

In Verallgemeinerung der bei Kleinfeld [8] betrachteten Invarianten — der mittleren Schnittzahl bzw. mittleren Verbindungszahl benachbarter Geraden bzw. benachbarter Punkte — verweisen wir auf eine weitere wesentliche Invariante einer K-Rel. $(\sim i)$:

0.9. **Lemma.** *Es sei $\mathscr{H}$ (t,r) H-Ebene des Typs n mit $t=q_2 \dots q_n$. Dann gilt für die mittlere Verbindungszahl λ_i $(\simeq i)$-benachbarter Punkte:*

$$\lambda_i = \frac{(r+1)\,q_2 \dots q_{i+1}}{1+q_{i+1}}.$$

In PH-Ebenen gilt offensichtlich auch die duale Aussage von 0.9, d.h. $(\simeq i)$-benachbarte Geraden haben im Mittel λ_i Punkte gemeinsam. λ_i ist eine Invariante der H-Ebene, also unabhängig von der Wahl des Punktes P und überträgt sich auf epimorphe Bilder.

Ist $\mathscr{H}$ eine FAH-Ebene und

$$\mu_i(g) = |\{h \mid g(\simeq i)h \text{ und } g \cap h = \varnothing\}|,$$

so beweist man durch elementares Abzählen für die mittlere Schnittzahl von g mit $(\simeq i)$-benachbarten Geraden von g folgendes Lemma:

0.10. **Lemma.** *Es sei $\mathscr{H}$ (t,r) FAH-Ebene des Typs n mit $t=q_2 \dots q_n$. Dann gilt für die mittlere Schnittzahl $\eta_i(g)$ von g mit $(\simeq i)$-benachbarten Geraden von g:*

$$\eta_i(g) = \frac{r \cdot t(u_{\simeq i} - u_{\simeq i+1})}{u_{\simeq i}^2 - \mu_i(g) - u_{\simeq i+1}^2}.$$

1. Stufenparameter $q_i = r$

Im folgenden sei $\mathscr{H} = \mathscr{H}_n$ eine (t,r) H-Ebene des Typs n, u_{n-1} die Invariante der K-Rel. $(\sim n-1)$ und $q=q_n$ $(=u_{n-1})$ n-ter Stufenparameter.

1.1. **Lemma.** *Für eine K-Rel. $(\sim n-1)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $q_n = r$.

(b) *Die K-Rel. $(\sim n-1)$ genügt der Bedingung* [1, Def. 4]

(M)a) *Aus $P, Q \in g$, $P \in h$, $P(\sim n-1)Q$, $g \sim h$ folgt $Q \in h$.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b). Wegen $|[P]_{\sim n-1}| = r^2 = (r+1)(r-1)+1$ inzidieren benachbarte Geraden $g, h \ni P$ in $[P]_{\sim n-1}$ in r Punkten, d.h. (M)a) ist erfüllt.

(b) $\Rightarrow$ (a). Aus $|[P]_{\sim n-1}| = q_n^2 = (r+1)(q_n-1)+1$ folgt unmittelbar (a).

Die Bedingung (M)a) ist Bestandteil der Definition einer *minimalen Nachbarschaft* [1, Def. 4]. Somit induziert eine minimale Nachbarschaft als K-Rel. für jeden Punkt den kleinsten Nachbarschaftsbereich. Eine minimale Nachbarschaft ist daher die kleinste K-Rel. in einer H-Ebene, nicht jedoch umgekehrt.

Zusätzlich zu der Bedingung (M)a) benutzte Artmann zur Definition der H-Ebenen der Höhe n [1, Def. 5] die dazu duale Bedingung

(M)b) Aus $P, Q \in g$, $P \in h$, $P \sim Q$, $g(\sim n-1)h$ folgt $Q \in h$.

Für PH-Ebenen erhalten wir aus Dualitätsgründen sofort:

1.2. **Lemma.** *Es sei* $(\sim n-1)$ K-*Rel. einer* (t, r) PH-*Ebene des Typs n. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) $q_n = r$.

(b) *Die* K-*Rel.* $(\sim n-1)$ *genügt der Bedingung* (M)a).

(c) *Die* K-*Rel.* $(\sim n-1)$ *genügt der Bedingung* (M)b).

Im fastaffinen Fall ist die Bedingung (M)b) allerdings von der Existenz genügend vieler nicht schneidender Geraden abhängig.

1.3. **Lemma.** *Es sei* $\mathscr{H}$ *eine* FAH-*Ebene des Typs n,* $q_n = r$. *Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Für alle Geraden g gibt es eine Gerade h* $(\sim n-1)g$ *mit* $|g \cap h| = 0$.

(b) *Die* K-*Rel.* $(\sim n-1)$ *genügt der Bedingung* (M)b).

(c) *Aus* $P(\simeq n-1)g$ *folgt:*

$$|\{h \in P \,|\, |g \cap h| = 0, g(\sim n-1)h\}| = 1.$$

Beweis. (a) ⇒ (b). Gegenteilige *Annahme:* Es gibt Geraden g, h mit $g(\sim n-1)h$, $|g \cap h| < t$. Sei $P \in g \cap h$, $Q \in g \setminus h$, $Q \sim P$ und $R \in g$, $R \nsim P$, $k \ni R$, $k \nsim g$. Auf der Geraden h wählen wir $r-1$ paarweise nicht benachbarte Punkte von P und verbinden mit Q. Diese Geraden schneiden k in $r-1$ zu R $(\sim n-1)$-benachbarten Punkten. Die restlichen $r-2$ Geraden durch P, die zu g $(\sim n-1)$-benachbart sind, können daher nicht mit Q inzidieren. Daher gibt es mindestens

$$r-1+r-1(r-1)(r-1)+2 = r^2+1,$$

was im Widerspruch zu $|[g]_{\sim n-1}| = r^2$ steht.

(b) ⇒ (c). Sei $P(\simeq n-1)g$. Da P mit genau r Geraden, die zu g $(\sim n-1)$ benachbart sind, inzidiert, folgt unmittelbar (c).

(c) ⇒ (a) offensichtlich

1.4. **Korollar.** *In einer* AH-*Ebene sind die Eigenschaften* (M)a) *und* (M)b) *äquivalente Bedingungen an eine* K-*Rel.*

Da die K-Rel. gerade die Kerne von H-Epimorphismen sind, ist die folgende geometrische Charakterisierung des Stufenparameters $q_{i+1} = r$ als Verallgemeinerung von 1.1 sofort ersichtlich:

1.5. **Korollar.** *Für eine* K-*Rel.* $(\sim i)$ *einer* (t, r) H-*Ebene des Typs n sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $q_{i+1} = r$.

(b) *Aus* $P(\simeq i)Q$, P, $Q \in g$, $P \in h$, $g \sim h$ *folgt* $Q(\sim i+1)h$

(c) *Die* K-*Rel.* $(\sim i)$ *in* $\mathscr{H}_{/\sim i+1}$ *genügt der Bedingung* (M)a).

Die 1.5.(b) erwähnte Eigenschaft wurde zuerst von Drake [4] in n-uniformen H-Ebenen festgestellt, in unserem Zusammenhang bezeichnet allerdings $(\sim i)$ (im Gegensatz zu den n-uniformen H-Ebenen) eine beliebige K-Rel. einer H-Ebene.

Ferner erhält man unmittelbar für FAH-Ebenen:

1.6. **Korollar.** *Es sei $\mathscr{H}$ eine* FAH-*Ebene des Typs n, $q_{i+1}=r$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Durch jeden Punkt $P(\simeq i)g$ gibt es eine Gerade $h(\sim i)g$, so daß für alle $X\in h$: $X(\simeq i)g$.*

(b) *Die* K-*Rel.* $(\sim i)$ *in* $\mathscr{H}_{/\sim i+1}$ *genügt der Bedingung* (M)b).

2. H-Ebenen der Höhe n, „Property A“ und das Axiom reziproker Strecken

Während wir im 1. Abschnitt lediglich einige Eigenschaften einer H-Ebene aufgezeigt haben, die aus der Tatsache folgen, daß ein Stufenparameter gleich der Ordnung r der Faktorstruktur, d.h. der zugehörigen projektiven bzw. affinen Ebene, ist, beschäftigen wir uns nun mit H-Ebenen, deren sämtliche Stufenparameter q_i gleich r sind.

In unserer Terminologie lautet die Definition einer H-Ebene der Höhe n, die man bei Artmann [1, Def. 5] für den projektiven Fall, bei Drake [6, Def. 17] für den fastaffinen bzw. affinen Fall findet, wie folgt:

2.1. **Definition.** Eine H-Ebene $\mathscr{H}$ des Typs n heißt H-*Ebene der Höhe n*, falls die K-Rel. $(\sim i)$ in den epimorphen Bildern $\mathscr{H}_{/\sim i+1}$ den Bedingungen (M)a) und (M)b) genügen.

Als unmittelbare Folgerung aus 1.4 und 1.5 ergibt sich der folgende Satz:

2.2. **Satz.** *Für eine (t, r)* AH-/PH-*Ebene $\mathscr{H}$ des Typs n sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(a) *$\mathscr{H}$ ist eine* H-*Ebene der Höhe n.*

(b) $t=r^{n-1}$.

Wir erinnern ferner an eine Eigenschaft „*Property* A“, die Drake [4] zur Definition von stark n-uniformen Ebenen benutzte. In unserer Terminologie lautet diese Bedingung für beliebige K-Rel. einer H-Ebene des Typs, wobei man [5, Prop. 1.10.9] beachte:

2.3. **Definition.** Eine H-Ebene $\mathscr{H}$ des Typs genügt der Bedingung „*Property* A“, falls für alle K-Rel. $(\sim i)$, $(\sim j)(i+j<n)$ gilt:

$$P\in h\cap k,\ h\cap k=\{R\in h \mid R(\sim n-i)P\},\ Q\in h\setminus k,\ P(\simeq j)Q \Rightarrow Q(\simeq i+j)k$$

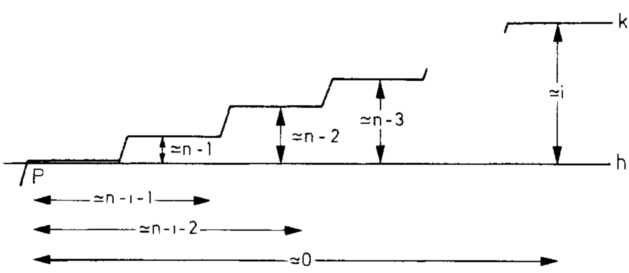

Fig. 1

Schließlich erwähnen wir noch das von Artmann zur Definition H-Ebenen n-ter Stufe benutzte *Axiom* RS *„reziproker Strecken."*

Die ursprüngliche Definition [1, S. 175] bzw. [6, Def. 18] für H-Ebenen der Höhe n modifizieren wir für H-Ebenen des Typs n:

2.4. **Definition.** Eine H-Ebene $\mathscr{H}$ des Typs n genügt dem *Axiom* RS *„reziproker Strecken"*, falls $\mathscr{H}$ folgende Eigenschaften besitzt:

RS(a) Für alle Geraden g, h von $\mathscr{H}$ mit $|g \cap h| > 0$ ist die Punktmenge $g \cap h$ ein Segment (für ein k mit $0 \leqq i \leqq n$).

RS(b) Falls $|g \cap h| > 0$, so gilt $g(\sim i)h$ genau dann, wenn g und h ein $(n-i)$-Segment gemeinsam haben $(0 \leqq i \leqq n)$.

Unter einem *i-Segment* verstehen wir (in naheliegender Weise) den nichtleeren Durchschnitt einer Geraden mit einer Klasse $(\sim i)$-benachbarter Punkte.

Wir formulieren RS wie folgt um:

2.5. **Lemma.** *Für eine* H-*Ebene* $\mathscr{H}$ *des Typs n sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\mathscr{H}$ *genügt dem Axiom* RS.

(b) *Für Geraden* g, h *mit* $g \cap h \neq \varnothing$, $P \in g \cap h$ *gilt:*

$$g(\simeq i)h \Leftrightarrow g \cap h = \{R \in g \mid P(\sim n-i)R\}.$$

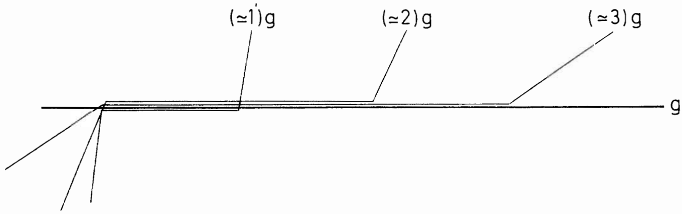

Fig. 2

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b). Mit $g(\simeq i)h$ ist $g(\sim i)h$, also $g \cap h \supseteq \{R \in g \mid P(\sim n-i)R\}$, weswegen mit RS(a) und RS(b) sofort die Gleichheit folgt. Ist umgekehrt $g \cap h = \{R \in g \mid P(\sim n - i)R\}$, so ist sicher $g(\sim i)h$. $g(\sim i+1)h$ hätte mit RS(b) $\{R \in g \mid P(\sim n-i-1)R\} \subseteq g \cap h$ zur Folge, was $g(\simeq i)h$ beweist.

(b) $\Rightarrow$ (a). Offensichtlich mit RS(a) erfüllt. Sei $g(\sim i)h$ und $g(\simeq j)h$ mit $j \geqq i$, so folgt

$$g \cap h = \{R \in g \mid P(\sim n-j)R\},$$

insbesondere also $\{R \in g \mid P(\sim n-j)R\} \subseteq g \cap h$. Entsprechend zeigt man die Umkehrung.

Schließlich können wir mit Hilfe von 2.5 die duale Aussage von 2.5(b) als zu RS äquivalent nachweisen.

2.6. **Lemma.** *Für eine* H-*Ebene* $\mathscr{H}$ *des Typs* n *sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *Für Geraden* g, h *mit* $g \cap h \neq \varnothing$, $P \in g \cap h$ *und alle* K-*Rel.* $(\sim i)$ *gilt:*

$$g(\simeq i)h \Leftrightarrow g \cap h = \{R \in g \mid P(\sim n-i)R\}.$$

(b) *Für Punkte* $P, Q \in g$ *und alle* K-*Rel.* $(\sim i)$ *gilt:*

$$P(\simeq i)Q \Leftrightarrow \langle P, Q \rangle = \{h \ni P \mid h(\sim n-i)g\}.$$

Der Beweis bleibe dem Leser überlassen.

Nach diesen beweistechnischen Umformungen des *Axioms* RS können wir nun die Beziehung zu der von Drake benutzten Eigenschaft „*Property* A" herstellen: die unterschiedlichen Bedingungen charakterisieren ein und dieselbe Klasse von H-Ebenen des Typs n.

Zunächst erhalten wir folgende numerische Bedingung aus dem Erfülltsein von *Axiom* RS.

2.7. **Lemma.** *Es sei* $\mathscr{H}$ *eine* (t, r) H-*Ebene vom Typ* n *und* $\mathscr{H}$ *genüge dem Axiom* RS. *Dann gilt:* $t = r^{n-1}$.

Beweis. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion, in dem wir zeigen: $q_{n-i} = r = q_{i+2}$.

Dabei nehmen wir stets Bezug auf die durchschnittlichen Verbindungszahlen $(\simeq i)$-benachbarter Punkte aufgrund von 2.5 und 2.6(b).

$$i=0. \quad \lambda_{n-1} = \frac{(r+1)\, q_2 \dots q_n}{1+q_n} = q_2 \dots q_n, \quad \text{also} \quad q_n = r,$$

$$\lambda_1 = \frac{(r+1)\, q_2}{1+q_2} = q_n = r, \quad \text{also} \quad q_2 = r.$$

Es sei bereits bewiesen: $q_2 = \dots = q_i = r$, $q_n = \dots = q_{n-i+2} = r$ und $i+1 \leqq n-i+2$ angenommen.

$$\lambda_{n-i} = \frac{(r+1)\, q_2 \dots q_{n-i+1}}{1+q_{n-i+1}} = q_{i+1} \dots q_n$$

$$= \frac{(r+1)\, r^{i-1}\, q_{i+1} \dots q_{n-i+1}}{1+q_{n-i+1}} = q_{i+1} \dots q_{n-i+1}\, r^{i-1}$$

d.h. $q_{n-i+1} = r$.

Entsprechend erhält man: $q_{i+1} = r$, was 2.7 beweist.

Mit Hilfe von 2.7 sind wir nun imstande, den Zusammenhang zwischen dem *Axiom* RS und der „*Property* A" aufzudecken.

Ist in 2.3 $j=0$, so folgt unmittelbar für $h \cap k \neq \varnothing$ und $P \in h \cap k$:

$$h(\simeq i)k \Leftrightarrow h \cap k = \{R \in h \mid R(\sim n-i)P\},$$

Somit genügt eine H-Ebene mit „*Property* A" auch dem *Axiom* RS; mehr noch, es gilt:

2.8. **Satz.** *Für eine* H-*Ebene* $\mathscr{H}$ *des Typs n sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
(a) $\mathscr{H}$ *genügt dem Axiom* RS,
(b) $\mathscr{H}$ *genügt „Property* A".

Beweis. Aufgrund der obigen Bemerkung können wir uns auf den Fall (a) $\Rightarrow$ (b) beschränken.

Wegen 2.7 ist $\mathscr{H}$ eine (r^{n-1}, r) H-Ebene.

Mittels vollständiger Induktion über j beweisen wir für $i \leqq j$ die Aussagen

$$Q(\simeq j)R,\ P(\simeq j-i)Q \Rightarrow |g \cap h| = r^i, \tag{4}$$

$$|g \cap h| = r^i,\ P(\simeq j-i)Q \Rightarrow Q(\simeq j)R. \tag{5}$$

Dabei sei stets P, $Q \in g$, P, $R \in h$, Q, $R \in k$, $g \nsim k \nsim h$.

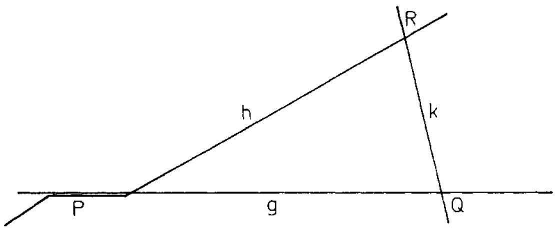

Fig. 3

Im Falle $i=j$ folgt (4) und (5) unmittelbar aus RS, während für $i=0$ die Aussagen (4) und (5) aufgrund von 1.5(b) erfüllt sind. Insbesondere ist daher (4) und (5) für $j=1$ richtig.

Wir nehmen nun an, (4) und (5) seien für $j' \leqq j-1$ bewiesen, ferner sei $Q(\simeq j)R$. Wir setzen: $j-i=v$

$$\mathscr{M}_v = \{X \in g \mid X(\simeq v)Q\},$$

$$\mathscr{N}_v = \{h \in R \mid \exists X \in \mathscr{M}_v, X \in h\}$$

und

$$s_v = |\mathscr{N}_v|.$$

Wir behaupten: $h \in \mathscr{N}_v \Rightarrow h(\simeq j-v)g$.

Sei v_1 kleinstes Gegenbeispiel, also

$$h \in \mathscr{N}_{v_1} \quad \text{und} \quad \neg(h(\simeq j-v_1)g). \tag{6}$$

Ist $v<v_1$, $h \in \mathscr{N}_v$, also $h(\simeq j-v)g$, d.h. $|g \cap h| = r^{j-v}$ insbesondere nach Voraussetzung $g \cap h = \{Y \mid Y(\sim n-j+v)P\}$.

Auf der Geraden g gibt es $r^{n-v} - r^{n-v-1}$ Punkte $(\simeq v)Q$. Jede Gerade $h \ni X, R$ überdeckt ein $(n-j-v)$-Segment, ferner gibt es aufgrund von 2.6 stets r^v Verbindungsgeraden. d.h. $s_\nu = r^{n-j+\nu} - r^{n-j+\nu-1}$, was schließlich

$$h(\simeq j-\nu)g \Rightarrow h \in \mathcal{N}_\nu \quad \text{für } \nu < \nu_1$$

beweist. Ist h eine Gerade gemäß (6), so gibt es $\mu > \nu_1$, so daß $h(\simeq j-\mu)$ gilt. Also ist $g \cap h| = r^{j-\mu}$ und $P(\simeq (j-\mu+\nu_1)-(j-\mu))Q$. Wegen $j-\mu < j+\nu_1-\mu < j$ folgt nach Induktionsvoraussetzung über (5) $R(\simeq j-\mu+\nu_1)Q$, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Ferner gilt:

$$h \in \mathcal{N}_\nu \Leftrightarrow h(\simeq j-\nu)g \Leftrightarrow h(\simeq i)g.$$

Um (5) zu beweisen, gehen wir wie folgt vor.

P inzidiert wegen (4) mit r^{j-i} Geraden $h \in \mathcal{N}_\nu$, also $h(\simeq i)g$, die durch R gehen. Entsprechendes gilt für sämtliche $r^{n-j} - r^{n-j-1}$ Punkte $R(\simeq j)Q$.

Andererseits gibt es genau $r^{n-i} - r^{n-i-1}$ Geraden $h \ni P$ mit $g(\simeq i)h$, wodurch (5) bewiesen ist.

3. H-Ebenen n-ter Stufe

Mit den im vorigen Kapitel erzielten Ergebnissen läßt sich nun auch der von Artmann gebrauchte Begriff einer H-Ebene n-ter Stufe als gleichwertig mit den anderen Begriffsbildungen nachweisen:

3.1. **Definition.** Eine H-Ebene $\mathscr{H}$ heißt H-*Ebene n-ter Stufe*, falls $\mathscr{H}$ H-Ebene der Höhe n ist und sämtliche epimorphen Bilder dem Axiom RS genügen.

Aufgrund von Satz 2.8 ist das folgende Lemma offensichtlich.

3.2. **Lemma.** *Gilt in einer* H-*Ebene* $\mathscr{H}$ *des Typs n das Axiom* RS, *so genügen auch sämtliche epimorphen Bilder von* $\mathscr{H}$ *dem Axiom* RS.

Daher reduziert sich der Beweis des oben angekündigten Ergebnisses im wesentlichen auf folgendes Lemma:

3.3. **Lemma.** *In einer* H-*Ebene* $\mathscr{H}$ *der Höhe n gilt das Axiom* RS.

Zum Beweis von 3.3 benötigen wir folgenden Hilfssatz, den wir daher hier einschieben:

3.4. **Lemma.** *Es sei* $\mathscr{H}$ *eine* FAH-*Ebene der Höhe n und* $\mu_i(g)$ *wie in* 0.10 *definiert. Dann ist*

$$\mu_i(g) \geq r^{2n-2i-1} - r^{2n-2i-2}. \tag{7}$$

Beweis. Es sei $P(\simeq i)g$. Da $\mathscr{H}_{/\sim i+1}$ eine H-Ebene der Höhe $i+1$ ist, gibt es eine Gerade $\varphi(h) \ni \varphi(P)$ mit $g \cap h = \varnothing$ und $g(\simeq i)h$. Es sei $k \nsim g$, $P \in k$ und $P_1 = k \cap h$. Auf h wählen wir einen Punkt $Q \nsim P_1$. Dann ist $QP_1 = h(\sim i+1)QP = h_1$, also $h_1\ (\simeq i)g$ und aufgrund 1.6 $h_1 \cap g = \varnothing$. Sämtliche r^{n-i-1} zu h_1 $(\sim i+1)$-benachbarten Geraden treffen gleichfalls g nicht und sind zu g $(\simeq i)$-benachbart. Dies gilt für sämtliche $r^{n-i} - r^{n-i-1}$ Punkte $P\ (\simeq i)g$ auf k, was (7) beweist.

Beweis von 3.3. Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion über die Aussagen

$$g(\simeq i)h,\ P\in g\cap h \Rightarrow g\cap h=\{R\in g\,|\,P(\sim n-i)R\}, \tag{8}$$

$$g\cap h=\{R\in g\,|\,P(\sim n-i)R\}\Rightarrow g(\simeq i)h, \tag{9}$$

$$P(\simeq n-i)Q,\ P,Q\in g\Rightarrow \langle P,Q\rangle=\{h\,|\,P,Q\in h\}=\{h\,|\,g(\sim i)h\ni P\}. \tag{10}$$

Aufgrund von 1.2 und 1.3 ist (8) für $i=n-1$ erfüllt. Da einerseits $\lambda_1=r$, andererseits aufgrund von (8) stets $\lambda_1\geqq r$ gilt, ist jede Gerade mit (9) auch $(\simeq n-1)$-benachbart zu g und es folgt (10).

Wir setzen (8), (9) und (10) als richtig für $i<j\leqq n-1$ voraus. Sei $P\in g\cap h$, $g(\simeq i)h$. Nach Induktionsvoraussetzung können sich die Geraden g und h nicht in zu $P(\simeq n-j)$-benachbarten Punkten $j>i$) treffen, also ist $g\cap h\subseteq\{R\in g\,|\,P(\sim n-i)R\}$, d.h. $|g\cap h|\leqq r^i$.

Ist $\mathscr{H}$ eine PH-Ebene, so erhält man aus 0.9.

$$r^i\geqq\lambda_i=\frac{(r+1)\,r^i}{1+r}=r^i$$

sofort $|g\cap h|=r^i$, also (8).

Ist $\mathscr{H}$ eine FAH-Ebene, so folgt mit 0.10 und Lemma 3.4

$$r^i\geqq\eta_i(g)=\frac{r^n(r^{n-i}-r^{n-i-1})}{r^{2n-2i}-\mu_i(g)-r^{2n-2i-2}}$$

$$\geqq\frac{r^n(r^{n-i}-r^{n-i-1})}{r^{2n-2i}-(r^{2n-2i-1}-r^{2n-2i-2})-r^{2n-2i-2}}=r^i$$

also $\eta_i(g)=r^i$, was (8) beweist.

Betrachten wir nun weiter $(\simeq n-i)$-benachbarte Punkte P, R auf g.

Da $\lambda_{n-i}=r^{n-i}$ ist, andererseits aber mindestens r^{n-i} Geraden durch P mit einem Punkt $R(\simeq n-i)P\in g$ inzidieren, ist (10) bewiesen. Aus Anzahlgründen folgt die Gültigkeit von (9).

Damit können wir abschließend das Hauptergebnis dieses Abschnittes wie folgt formulieren:

3.5. **Satz.** *Es sei $\mathscr{H}$ eine* H-*Ebene des Typs n. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) $\mathscr{H}$ *ist eine* H-*Ebene der Höhe n,*
(b) $\mathscr{H}$ *ist eine* H-*Ebene n-ter Stufe,*
(c) $\mathscr{H}$ *genügt dem Axiom* RS,
(d) $\mathscr{H}$ *genügt „Property* A“,
(e) $\mathscr{H}$ *ist stark n-uniform.*

Beweis, (a)⇒(b). 3.2, 3.3; (b)⇒(c) trivial.

(c)⇒(d). 2.8;

(d)⇒(e). Wegen 2.8, 3.2 und 3.3 ist $\mathscr{H}$ eine H-Ebene n-ter Stufe, nach [6, Satz 28] ist daher $\mathscr{H}$ stark n-uniform.

(e) $\Rightarrow$ (a). Ist $\mathscr{H}$ eine PH- bzw. AH-Ebene des Typs n, so ist wegen 2.2 H-Ebene der Höhe n.

Ist $\mathscr{H}$ eine FAH-Ebene des Typs n, so folgt aus der Eigenschaft (e) mit [5, 1.16], daß hinreichend viele Paare nicht schneidender Geraden existieren, und mit 1.5 und 1.6 erhält man die Behauptung (a).

Wir betonen, daß der einer stark n-uniformen AH-Ebene des Typs n zugrundeliegende Parallelismus gleichmäßig sein muß. Läßt man in 3.5 die Voraussetzung „H-Ebene des Typs n" weg, so ist (e) durch (e') „$\mathscr{H}$ ist stark n-uniform (mit gleichmäßigem Parallelismus, falls $\mathscr{H}$ AH-Ebene ist)" zu ersetzen. Beim Nachweis (e') $\Rightarrow$ (a) beachte man, daß zunächst eine stark n-uniforme FAH-Ebene (r^{n-1}, r) FAH-Ebene des Typs n ist. Wegen „Property S'" [5, 1.15] erfüllen sämtliche K-Rel. einer stark n-uniformen AH-Ebene die Eigenschaft (AK 6) und, da der Parallelismus als gleichmäßig vorausgesetzt wird, auch (AK 7). Somit ist $\mathscr{H}$ AH-Ebene des Typs n und wegen 2.2 AH-Ebene der Höhe n. (Einen anderen Beweis enthält [6, Satz 34].)

Literatur

1. Artmann, B.: Hjelmslev-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaftsrelationen. Math. Z. **112**, 163–180 (1969)
2. Artmann, B.: Existenz und projektive Limiten von Hjelmslev-Ebenen n-ter Stufe. In: Atti del Convegno die Geometria Combinatoria e sue Applicazioni. (Perugia 1970), pp. 27–41. Perugia: Università degli Studi di Pergia, Istituto di Matematica 1971
3. Bacon, Ph.Y.: Strongly n-uniform and level n Hjelmslev planes. Math. Z. **127**, 1–9 (1972)
4. Drake, D.A.: On n-uniform Hjelmslev planes. J. combinat. Theory **9**, 267–288 (1970)
5. Drake, D.A.: Existence of parallelisms and projective extensions for strongly n-uniform near affine Hjelmslev planes. Geometriae dedicata **3**, 191–214 (1974)
6. Drake, D.A.: Affine Hjelmslev-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaftsrelationen. Math. Z. **143**, 15–25 (1975)
7. Drake, D.A., Törner, G.: Die Invarianten einer Klasse projektiver Hjelmslev-Ebenen. J. Geometry **7**, 157–174 (1976)
8. Kleinfeld, E.: Finite Hjelmslev planes. Illinois J. Math. **3**, 403–407 (1959)
9. Törner, G.: Eine Klassifizierung von Hjelmslev-Ringen und Hjelmslev-Ebenen. Mitt. math. Sem. Gießen **107** (1974)
10. Törner, G.: Homomorphismen von affinen Hjelmslev-Ebenen. Math. Z. **141**, 159–167 (1975)
11. Craig, R.T.: Extension of finite projective planes. I. Uniform Hjelmslev planes. Canadian J. Math. **16**, 261–266 (1964)
12. Lüneburg, H.: Affine Hjelmslev-Ebenen mit transitiver Translationsgruppe. Math. Z. **79**, 260–288 (1962)

Eingegangen am 15. November 1976