Sonderabdruck aus
ARCHIV DER MATHEMATIK
Vol. XXVIII 1977 BIRKHÄUSER VERLAG, BASEL UND STUTTGART Fasc. 3

Über ein Problem von Klingenberg

Von
GÜNTER TÖRNER

Klingenberg stellte in [2, S. 405] die Frage, ob sämtliche (kommutativen) Hjelmslev-Ringe — die Koordinatenbereiche desarguesscher projektiver Hjelmslev-Ebenen — geeignete epimorphe Bilder von Bewertungsringen sind.

Dabei verstehen wir unter einem (nicht notwendig kommutativen) *Hjelmslev-Ring* (H-Ring) [3] einen lokalen Ring, dessen Links- und Rechtsidealverband linear geordnet ist — solche Ringe nennen wir Kettenringe [1] — und für den jede Nichteinheit Links- und Rechtsnullteiler ist. Gemäß [4, S. 12] heißt ein nullteilerfreier Kettenring, dessen sämtliche Links- bzw. Rechtsideale zweiseitige Ideale sind, *Bewertungsring*.

Beschränkt man sich nicht nur auf den kommutativen Fall, so lautet die von Klingenberg aufgeworfene Frage wie folgt:

Sind sämtliche Links- bzw. Rechtsideale eines H-Ringes zweiseitig?

Diese Frage muß verneint werden, wie folgendes Beispiel zeigt, was eine Idee von [5] benutzt. Dieses Beispiel ist nicht nur im Rahmen der Theorie desarguesscher Hjelmslev-Ebenen von Interesse, sondern auch für ringtheoretische Fragestellungen, wie sie in [1] aufgeworfen wurden, von Bedeutung.

Zu einem Körper F bilden wir den Quotientenkörper der Potenzreihenringe in zwei kommutierenden Unbestimmten x, y, also $K = F((x))((y))$. Offensichtlich sind $R = F((x))[[y]]$ und $S = F((y))[[x]]$ diskrete Bewertungsringe mit $R \not\subset S \not\subset R$. Wie in [1] betrachten wir den Schiefpotenzreihenring $W = K[[z, \sigma]]$, wobei σ der durch $x^\sigma = y$, $y^\sigma = x$, $a^\sigma = a$ (für alle $a \in F$) bestimmte „potenzreihentreue" Automorphismus von K (mit $R^\sigma = S$, $S^\sigma = R$) ist und $kz = zk^\sigma$ für $k \in K$ gesetzt wird.

Dann ist $T = \left\{ r + \sum_{i \geq 1} z^i k_i \in W \mid r \in R,\ k_i \in K \right\}$ nach [1] ein Kettenring.

Lemma. 1. *$I = \{z^2 a \mid a \in T\}$ ist ein zweiseitiges Ideal und T/I ein H-Ring.*
2. *T/I besitzt ein nicht zweiseitiges Links- (Rechts-) Ideal.*

Beweis. 1. Offensichtlich ist I ein Rechtsideal. Sei $a = r + \sum z^i k_i \in T$, so ist wegen $\sigma^2 = 1_K$ nun

$$a z^2 = (r + \sum z^i k_i) z^2 = z^2 r + z^2 (\sum z^i k_i) = z^2 a\,.$$

Daher ist I ein zweiseitiges Ideal und T/I ein Kettenring. Ist $a = r + \sum z^i k_i$ Nichteinheit in T, so ist $r \in J(R)$. Sei $r \neq 0$, so gilt $r z^2 r^{-1} = z^2 r^{-1} r = z^2 \in I$, wobei $z^2 r^{-1} \notin I$. Ist $r = 0$, so setzt man $b = z^2 p$ für ein $p \notin R$ und erhält $ab, ba \in I$.

2. Wegen $R \not\subset S \not\subset R$ gilt $Tz \not\subset zT \not\subset Tz$.

Literaturverzeichnis

[1] H. H. Brungs and G. Törner, Chain rings and prime ideals. Arch. Math. **27**, 253–260 (1976).
[2] W. Klingenberg, Projektive und affine Ebenen mit Nachbarelementen. Math. Z. **60**, 384–406 (1954).
[3] W. Klingenberg, Desarguessche Ebenen mit Nachbarelementen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **20**, 97–111 (1955).
[4] O. F. G. Schilling, The Theory of Valuations. New York 1950.
[5] W. Stephenson, Modules whose lattice of submodules is distributive. Proc. London Math. Soc. **28**, 291–310 (1974).

Eingegangen am 27. 10. 1975

Anschrift des Autors:

Günter Törner
Fachbereich Mathematik der
Technischen Hochschule
Schloßgartenstr. 7
D-6100 Darmstadt