GÜNTER TÖRNER

n-UNIFORME PROJEKTIVE HJELMSLEV-EBENEN SIND STARK n-UNIFORM

n-Uniforme projektive Hjelmslev-Ebenen (PH-Ebenen) wurden von Drake [3] als Verallgemeinerungen von endlichen uniformen PH-Ebenen eingeführt und untersucht. Für die Behandlung dieser Klasse von PH-Ebenen erwies sich die in [3, Def. 3.4] 'Property A' genannte Bedingung hilfreich. Da bislang unbekannt war, ob diese Eigenschaft eine echte Zusatzbedingung für n-uniforme PH-Ebenen ist, bezeichnete man solche n uniforme PH-Ebenen, in denen 'Property A' gilt, als 'strongly n-uniform' PH-Ebenen. Bacon [2] zeigte, daß diese Ebenen genau die von Artmann [1] definierten endlichen stark n-uniformen PH-Ebenen sind.

Hier wird nun der im Titel erwähnte Sachverhalt bewiesen. Für fast n-uniforme fast affine Hjelmslev-Ebenen (FAH-Ebenen) wird unter der Voraussetzung, daß die Ebene einen gleichmäßigen Parallelismus besitzt, ein entsprechender Satz bewiesen. Damit verallgemeinern wir ein ähnliches Ergebnis von Drake [5] für Quasitranslationsebenen.

Bezüglich der Definitionen und Eigenschaften von fast n-uniformen PH-Ebenen, FAH-Ebenen und AH-Ebenen (affinen Hjelmslev-Ebenen) verweisen wir auf [4]. Gemäß [3] sagen wir: Eine fast n-uniforme (t, r) PH-Ebene (FAH-Ebene, AH-Ebene) besitzt die Eigenschaft (A), falls für Punkte P, Q, Geraden g, h mit $P \in g \cap h$, $Q \in g - h$, $|g \cap h| = r^i$ und $P(\simeq j - i)Q$ $(i \leqslant j < n)$ stets $Q(\simeq j)h$ folgt.

SATZ 1. *Fast n-uniforme PH-Ebenen sind stark n-uniform.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß in einer fast n-uniformen PH-Ebene Eigenschaft (A) erfüllt ist.

Zunächst gilt (A) wegen [4, Prop. 1.10.7] stets für $i = 0$, so daß wir im folgenden $i > 0$ voraussetzen. Dann ist insbesondere auch $g \sim h$. Daher genügt es nach [4, Lemma 1.12], den Schnittpunkt R einer Geraden $k \nsim g$, $k \ni Q$ mit der Geraden h zu betrachten und wir erhalten: $Q(\simeq j)h \Leftrightarrow Q(\simeq j)R$.

Durch Induktion bezüglich j beweisen wir nun:

Für Punkte P, Q, R, Geraden g, h, k mit $P, Q \in g$, $R, Q \in k$, $P, R \in h$, $g \nsim k \nsim h$ und $0 < i \leqslant j < n$ gilt:

(1) $\quad Q(\simeq j)R$ und $P(\simeq j - i)Q \Rightarrow |g \cap h| = r^i$,

(2) $\quad |g \cap h| = r^i$ und $P(\simeq j - i)Q \Rightarrow Q(\simeq j)R$.

Es sei $Q(\simeq 1)R$. Sämtliche r^{n-1} zu g benachbarten Geraden $h \ni R$ schneiden g in zu Q entfernten Punkten P ([4, Prop. 1.10.7 und Lemma 1.11]). Aus Anzahlgründen folgt daher:

(3) $\quad Q(\simeq 1)R$ und $P(\simeq 0)Q \Rightarrow |g \cap h| = r$.

Geometriae Dedicata 6 (1977) 291–295.

Aussage (3) gilt für alle $r^{n-1} - r^{n-2}$ Punkte $R \in k$, die zu $Q(\simeq 1)$-benachbart sind, so daß durch einen Punkt $P \nsim Q$ mindestens $r^{n-1} - r^{n-2}$ Geraden h mit $|g \cap h| = r$ gehen. Nach [4, Prop. 1.10.5] gilt für $P \in g$:

$$|\{h \ni P \mid |g \cap h| = r\}| = r^{n-1} - r^{n-2}, \text{ weswegen } |g \cap h| = r \text{ und } P(\simeq 0)Q \text{ nun } Q(\simeq 1)R \text{ nach sich zieht.}$$

Sei nun (1) und (2) als richtig für alle $j' \leqslant j - 1$ vorausgesetzt und $Q(\simeq j)R$ mit $j < n$. Wir setzen für $0 \leqslant \nu < j$: $\mathfrak{M}_\nu = \{T \in g \mid T(\simeq \nu)Q\}$. Man beachte, daß aus [4, Prop. 1.10.7] folgt:

(4) $\qquad X \in \mathfrak{M}_\nu \Rightarrow X(\simeq \nu)R.$

Ferner sei $\mathfrak{N}_\nu = \{h \mid \exists X \in \mathfrak{M}_\nu, X, R \in h\}$, $s_\nu = |\mathfrak{N}_\nu|$ und $\mathfrak{B}_\nu = \{(P, h) \mid P \in \mathfrak{M}_\nu, P, R \in h\}$. Mit (4) und [4, Prop. 1.10.4] erhält man für $1 \leqslant \nu \leqslant j - 1$:

$$|\mathfrak{B}_\nu| = (r^{n-\nu} - r^{n-\nu-1})r^\nu = r^n - r^{n-1} \quad \text{für } \nu = 0 \text{ folgt:}$$
$$|\mathfrak{B}_0| = r^{n-1}(1 + r) - r^{n-1} = r^n.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt für $0 < i \leqslant j$:

(5) $\qquad h \in \mathfrak{N}_{j-i} \Rightarrow |g \cap h| > r^{i-1}.$

Also ist $|g \cap h| \geqslant r^i$. Ist $(P, h) \in \mathfrak{B}_\nu$, so ist $h \in \mathfrak{N}_\nu$. Ist umgekehrt $h \in \mathfrak{N}_\nu$, so gibt es $X \in \mathfrak{M}_\nu$, $X \in h$, also $(X, h) \in \mathfrak{B}_\nu$. Wegen (5) ist $|g \cap h| \geqslant r^{j-\nu}$, daher folgt aus [4, Prop. 1.10.9]:

$$\{X' \in g \mid X'(\sim n - j + \nu)X\} \subseteq g \cap h.$$

Wegen $j < n$ sind solche Punkte $X'(\simeq \nu)$-benachbart zu Q. Daher gilt: $s_\nu \cdot r^{j-\nu} \leqslant |\mathfrak{B}_\nu|$ und somit

(6) $\qquad s_\nu \leqslant r^{n-j+\nu} - r^{n-1-j+\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, j - 1;$ und

(7) $\qquad s_0 \leqslant r^n/r^j = r^{n-j}.$

Da zu g benachbarte Geraden h, die mit $R(\simeq j)Q$ inzidieren, die Gerade g in Punkten $P(\simeq \nu)Q$ mit $0 \leqslant \nu \leqslant j - 1$ wegen [4, Prop. 1.10.7 und 1.11] schneiden, folgt aus (6) und (7)

$$r^{n-1} \leqslant \sum_{\nu=0}^{j=1} s_\nu \leqslant r^{n-j} + \sum_{\nu=1}^{j=1} (r^{n-j+\nu} - r^{n-1-j+\nu}) = r^{n-1}$$

Daher erhalten wir für $1 \leqslant \nu \leqslant j - 1$, $s_\nu = r^{n-j+\nu} - r^{n-1-j+\nu}$ bzw. $s_0 = r^{n-j}$. Offensichtlich impliziert dies:

$$\nu \neq \nu' \Rightarrow \mathfrak{N}_\nu \cap \mathfrak{N}_{\nu'} = \varnothing$$

was $\{X' \in g \mid X'(\sim n - j + \nu)X\} = g \cap h$ zur Folge hat. Damit ist

(8) $\qquad h \in \mathfrak{N}_{j-i} \Rightarrow |g \cap h| = r^i$

bewiesen, was die Richtigkeit von (1) der Induktionsbehauptung belegt. Entsprechendes gilt für sämtliche $r^{n-j} - r^{n-j-1}$ Punkte $R \in k$, die zu $Q(\simeq j)$-benachbart sind. Somit gibt es durch einen Punkt $P(\simeq j - i)Q$ wegen (1) und wegen $R(\simeq j - i)P$ für jedes zu $Q(\simeq j)$-benachbarte $R \in k$, $r^{n-i} - r^{n-i-1}$ Geraden h durch P mit $|g \cap h| = r^i$; nach [4, Prop. 1.10.5] aber auch höchstens $r^{n-i} - r^{n-i-1}$ Geraden durch P mit $|g \cap h| = r^i$. Damit ist auch (2) bewiesen, $\mathscr{H}$ erfüllt also Bedingung (A). Aus [4, Th. 3.5] und [2, Th. 3.1] folgt die Behauptung.

Mit [1], [2, Th. 3.1] und Satz 1 erhält man unmittelbar:

SATZ 2. *Für eine endliche PH-Ebene $\mathscr{H}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*
(a) *$\mathscr{H}$ ist n-uniform.*
(b) *$\mathscr{H}$ ist 'strongly' n-uniform.*
(c) *$\mathscr{H}$ ist stark n-uniform.*
(d) *$\mathscr{H}$ ist PH-Ebene n-ter Stufe.*

Wir wenden uns nun der Behandlung des affinen Falles zu. Analysiert man den Beweis von Satz 1, so ergibt sich folgendes Resultat:

LEMMA 1. *Es sei $\mathscr{H} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in)$ eine fast n-uniforme FAH-Ebene und es gelte für alle Punkte P, Geraden g und $j < n$:*

$$P(\simeq j)g \Rightarrow |\{x \in \mathfrak{G} \mid P \in x, |x \cap g| = 0\}| \leqslant r^{n-j-1}. \tag{9}$$

Dann erfüllt $\mathscr{H}$ die Bedingung (A) und es gilt:

$$|\{x \in \mathfrak{G} \mid P \in x, |x \cap g| = 0\}| = r^{n-j-1}.$$

Beweis. Wir übernehmen die Bezeichnungen des Beweises von Satz 1 und beweisen mittels vollständiger Induktion die Aussagen (1) und (2).

Es sei $Q(\simeq 1)R$. Höchstens r^{n-2} Geraden durch R schneiden die Gerade g nicht. Andererseits kann eine zu g benachbarte Gerade x mit $|x \cap g| \neq 0$ die Gerade g nur in Punkten $P \nsim Q$ schneiden ([4, Prop. 1.10.7 und Lemma 1.11]). Aus Anzahlgründen folgt daher die Aussage (3). Ferner erhält man, daß genau r^{n-2} Geraden, die g nicht treffen, mit R inzidieren, woraus sich die Aussage (2) im Falle $j = 1$ ergibt.

Beim Induktionsschluß verfährt man analog wie im Beweis von Satz 1 und erhält dann die Abschätzung (10)

$$\begin{aligned} r^{n-1} &\leqslant \sum_{\nu=0}^{j-1} s_\nu + |\{x \mid R \in x, |x \cap g| = 0\}| \\ &\leqslant r^{n-j} - r^{n-j-1} + \sum_{\nu=1}^{j-1} (r^{n-j+\nu} - r^{n-1-j+\nu}) + r^{n-j-1} \\ &= r^{n-1}. \end{aligned} \tag{10}$$

Aus den Gleichungen

$$(11)\qquad s_0 = r^{n-j} - r^{n-j-1}$$

$$(12)\qquad s_\nu = r^{n-j+\nu} - r^{n-1-j+\nu}, \quad \nu = 1,\ldots,j-1$$

$$(13)\qquad |\{x \mid R \in x, |x \cap g| = 0\}| = r^{n-j-1}$$

folgt wie oben die Behauptung.

Im folgenden Lemma werden wir zeigen, daß die Existenz eines gleichmäßigen Parallelismus [4, Def. 2.1] in einer fast n-uniformen FAH-Ebene hinreichend für das Erfülltsein von (9) ist.

LEMMA 2. *Es sei* $\mathscr{H} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}, \in)$ *eine fast n-uniforme* (t, r) *FAH-Ebene, die einen gleichmäßigen Parallelismus* $\|$ *besitze. Dann gilt für alle Punkte* P, *Geraden* g *und* $j < n$:

$$P(\simeq j)g \Rightarrow |\{x \in \mathfrak{G} \mid P \in x, |x \cap g| = 0\}| = r^{n-j-1}.$$

Beweis. Wie oben beziehen wir uns auf die Bezeichnungen im Beweis von Satz 1. Ferner sei l die Parallele durch R zu g, in Zeichen: $l = L(R, g)$. Mittels vollständiger Induktion beweisen wir die Aussagen (1), (2) und (9), wobei wir im wesentlichen nur den Induktionsschluß für die Aussage (9) durchführen. Das Übrige verläuft wie im Beweis von Lemma 1.

Es sei $R(\simeq 1)Q$ und $x \ni R$ mit $|x \cap l| = r$. Parallelen zu l durch sämtliche Punkte von x inzidieren auf der sie kreuzenden Geraden k mit genau $r^n/r = r^{n-1}$ zu R benachbarten Punkten, d.h. $|g \cap x| \neq 0$. Daher können höchstens Geraden $x \ni R$ mit $|x \cap l| \geqslant r^2$ – also insgesamt höchstens r^{n-2} – die Gerade g nicht schneiden.

Es sei nun $R(\simeq j)Q$ und (1), (2) und (9) werde für $j' \leqslant j - 1$ als richtig vorausgesetzt. Wir zeigen, daß sämtliche Geraden $x \ni R$ mit $|x \cap l| \leqslant r^j$ die Gerade g schneiden; daher können wiederum höchstens

$$|\{x \mid R \in x, |x \cap l| \geqslant r^{j+1}\}| = r^{n-j-1}$$

Geraden die Gerade g nicht treffen. Sei $x \ni R$ mit $|x \cap l| = r^\nu$ und $1 \leqslant \nu \leqslant j - 1$. Da der Parallelismus gleichmäßig ist, gibt es $(r-1)r^{n-1-\nu}$ Parallelen zu l durch Punkte auf x, die nicht zu R benachbart sind. Nach Induktionsvoraussetzung (2) inzidieren diese Parallelen genau mit den $(\simeq\nu)$-benachbarten Punkten von R auf k. Ist m Parallele zu l mit $|x \cap l| = r^\nu$ durch einen Punkt von x, der zu R benachbart ist, so folgt unter Anwendung der Induktionsbehauptung (1) und [4, Prop. 1.10.7 und 1.10], daß m auf k mit einem zu $R(\sim\nu + 1)$-benachbarten Punkt inzidiert. Somit schneiden sämtliche r^{n-1}/r^ν Parallelen dieser Art die Gerade k in zu $R(\sim\nu + 1)$-benachbarten Punkten.

Betrachten wir nun eine Gerade $x \ni R$ mit $|x \cap l| = r^j$, sämtliche Parallelen zu l durch Punkte auf x und die Schnittpunkte mit der sie kreuzenden Gerade k.

Annahme. Es gibt einen Punkt $R' \in k$, $R'(\sim j)R$, der nicht mit einer der oben erwähnten Parallelen inzidiert. Dann gibt es $R'' \in k$, $R''(\simeq \mu)R$ mit $\mu < j$ und $|L(R'', l) \cap x| = r^j$. Sei $P' \in x \cap L(R'', l)$, so ist $P'(\simeq \mu - i)R''$ für ein $i \leqslant \mu$, also nach Induktionsvoraussetzung (1) $|L(R'', l) \cap x| = r^i \leqslant r^\mu < r^j$. Widerspruch! Daher treffen sämtliche r^{n-j} Parallelen zu l durch Punkte auf x die Gerade k in $(\sim j)$-benachbarten Punkten von R. Damit ist $|\{x \mid R \in x, |x \cap g| = 0\}| \leqslant r^{n-j-1}$ bewiesen und die Behauptung von Lemma 2 ergibt sich wie oben erwähnt.

SATZ 3. *Für eine fast n-uniforme FAH-Ebene $\mathscr{H}$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *$\mathscr{H}$ ist eine stark n-uniforme FAH-Ebene.*

(b) *$\mathscr{H}$ besitzt einen gleichmäßigen Parallelismus.*

Beweis. (a) $\Rightarrow$ (b) [4, Th. 3.1], (b) $\Rightarrow$ (a) Lemma 1 und 2.

Da ein Parallelismus einer Quasitranslations-H-Ebene gleichmäßig ist, ergibt sich ein Ergebnis von Drake [5] als Korollar:

KOROLLAR 1. *Jede n-uniforme Quasitranslations-Hjelmslev-Ebene ist stark n-uniform.*

In Anwendung von [4, Th. 4.1] und Satz 3 erhalten wir:

KOROLLAR 2. *Jede n-uniforme FAH-Ebene, die einen gleichmäßigen Parallelismus besitzt, hat als projektive Erweiterung eine stark n-uniforme PH-Ebene.*

BIBLIOGRAPHIE

1. Artmann, B.: 'Hjelmslev-Ebenen mit verfeinerten Nachbarschaftsrelationen', *Math. Z.* **112** (1969), 163–180.
2. Bacon, Ph.Y.: 'Strongly *n*-Uniform and Level *n* Hjelmslev Planes', *Math. Z.* **127** (1972), 1–9.
3. Drake, D.A.: 'On *n*-Uniform Hjelmslev Planes', *J. Comb. Theory* **9** (1970), 267–288.
4. Drake, D.A.: 'Existence of Parallelisms and Projective Extensions for Strongly *n*-Uniform near Affine Hjelmslev Planes', *Geom. Dedicata* **3** (1974), 191–214.
5. Drake, D.A.: 'All *n*-Uniform Quasitranslation Hjelmslev Planes are Strongly *n*-Uniform', *Proc. Am. Math. Soc.* **50** (1975).

Anschrift des Verfassers:

G. Törner,
Mathematisches Institut der
Justus Liebig-Universität,
6300 Gießen,
Arndtstr. 2,
Deutschland

(Eingegangen am 20.8.1975)