Jahrbuch Überblicke Mathematik 1978, 9 - 26

Jahrbuch
Überblicke
Mathematik
1978

Bewertungsringe*

von Günter Törner

Im folgenden wird der Versuch unternommen, überblicksartig über das Auftreten von Bewertungsringen in verschiedenen Bereichen der Mathematik zu berichten. Es geht uns dabei weniger darum, über die letzten Forschungsergebnisse in dieser Hinsicht zu referieren, als vielmehr die *zentrale Rolle einer sehr speziellen algebraischen Struktur* in vielen Problemen herauszuarbeiten. Notwendigerweise muß eine solche Darstellung unvollständig bleiben; auch mögen die ausgewählten Anwendungsfelder dem einen und anderen Leser unter Umständen einseitig erscheinen; außerdem gehen wir nicht auf die mittlerweile zahlreichen und vielversprechenden Verallgemeinerungen von Bewertungen auf Ringe, Gruppen, Verbände usw. ein. Kurz: uns geht es um eine exemplarische Beschreibung des Auftretens von Bewertungsringen, wobei wir weitgehend auf Beweise verzichten werden. Der interessierte Leser möge sich in der entsprechenden Literatur informieren. Schließlich ist es unumgänglich, einige wenige Fakten aus der Bewertungstheorie für den Leser bereitzustellen.

0. Vorbemerkungen und historische Wurzeln

Die Wurzeln der Bewertungstheorie liegen im wesentlichen im Zusammenspiel der Zahlentheorie, der Funktionentheorie und der Algebra als der Theorie der algebraischen Zahlen. Wenngleich verschiedenen Arbeiten von Cantor, Steinitz, Hadamard und Weierstraß – im heutigen Sprachgebrauch – bewertungstheoretische Ideen und Methoden zugrunde liegen [19, S. 221], so wird die stürmische Entwicklung dieser Theorie allerdings erst durch das Buch von Hensel: Theorie der algebraischen Zahlen (1908) [11] nachhaltig eingeleitet. Ausgangspunkt sind für Hensel die erstaunlichen Ergebnisse und eleganten Methoden der Funktionentheorie einerseits, die formale Ähnlichkeit verschiedener Begriffsbildungen mit denen in der Zahlentheorie und Algebra und schließlich andererseits die im Vergleich mit der Funktionentheorie bescheidenen, mit großem Aufwand erreichten Fortschritte in der Zahlentheorie. Während in der Funktionentheorie die Frage, ob eine analytische Funktion algebraisch oder transzendent ist, anhand der singulären Stellen der Funktion und der Tatsache, ob sie eindeutig, mehrdeutig oder unendlich vieldeutig ist, (theoretisch) einfach zu unterscheiden ist, ist man in der Zahlentheorie noch nicht wesentlich über die entsprechenden Fragen bei e bzw. π hinausgekommen. Hensel hat dafür folgende Erklärung [11, S. 3]:

---

*Überarbeitete Fassung des am 11. März 1977 vor dem FB Mathematik der Technischen Hochschule Darmstadt gehaltenen Habilitationsvortrages.

„Der Grund, warum die allgemeine Untersuchung der Zahlgrößen so außerordentlich viel schwieriger ist als die der Funktionen, scheint mir nun ausschließlich der zu sein, daß wir für die Zahlen im wesentlichen nur eine einzige Darstellung kennen, während wir für jede Funktion unendlich viele Funktionselemente finden können. Für die Zahlen haben wir nämlich allein die Darstellung ihrer Größe nach, z.B. in Form eines Dezimalbruches mit reellen oder komplexen Koeffizienten. Für eine reelle positive oder negative Zahl besteht nämlich stets die eindeutig bestimmte Entwicklung:

$$c = \pm \sum_{\nu} c_{\nu} \left(\frac{1}{10}\right)^{\nu} \ldots$$

Wir haben also für die Zahlen nur die Entwicklung nach fallenden Potenzen von 10 oder, was genau dasselbe ist, von irgendeiner anderen Grundzahl; . . . der Form nach entspricht dies der Entwicklung einer analytischen Funktion $f(z)$ nach fallenden Potenzen von z, d.h. in der Umgebung der unendlich fernen Stelle. Die Theorie der Funktionen würde genau dieselben Schwierigkeiten bieten wie die der Zahlen, wenn wir für sie etwa auch nur eine Entwicklung kennen würden.“

Dies führt Hensel zur Konstruktion einer neuen Klasse von Zahlen, den *p-adischen Zahlen*, die nach steigenden Potenzen einer Grundzahl zu entwickeln sind. (Eine ausführliche Darstellung der p-adischen Zahlen findet man z.B. in der Originalarbeit [11], aber auch etwa in [3]. Wir werden weiter unten eine, für das folgende ausreichende Charakterisierung angeben.) Die p-adischen Zahlen bilden, wie Hensel aufzeigt, einen Körper $\mathbb{Q}_p$, der ähnlich wie die reellen Zahlen in gewissem Sinn (siehe Kapitel 2) vollständig ist. Da sowohl der Körper der reellen Zahlen als auch der p-adische Zahlkörper Oberkörper der rationalen Zahlen ist, stellt sich für Kürschak (1913) [19] und insbesondere für Ostrowski (1917) [26] die Aufgabe einer einheitlichen, beide Typen umfassenden Theorie der Konstruktionen. In der heutigen Bezeichnungsweise könnte man die Idee von Ostrowski wie folgt wiedergeben: Bekanntlich bilden die Cauchy-konvergenten rationalen Zahlenfolgen einen Ring R, wobei die Nullfolgen ein maximales Ideal J darstellen. Mit Hilfe der Cauchy-Folgen sollen nun „neue“ Zahlen eingeführt werden, wobei Cauchy-konvergente Folgen, die sich um eine Nullfolge unterscheiden, die gleiche Zahl beschreiben sollen; kurz: wir bilden den Restklassenring R/J, der ein Körper ist, da J maximales Ideal ist und nennen ihn den Körper der reellen Zahlen. Bei diesem Zugang ist nun folgendes bemerkenswert: Cauchy-Konvergenz wird wie üblich mit Hilfe des Absolutbetrages formuliert, beim Konstruktionsverfahren wird aber nur von den funktionalen Eigenschaften des Absolutbetrages Gebrauch gemacht:

(1) $|a| > 0$ für $a \neq 0$, $|0| = 0$

(2) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

(3) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$.

Somit liegt es nahe, (1) - (3) als System von Funktionalgleichungen von Funktionen $\varphi : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ zu untersuchen, nach dessen Lösungen zu fragen und die nach dem oben beschriebenen Verfahren entstehenden Körper zu beschreiben.

Natürlich ist

(4) $\varphi(x) = |x|^{\rho}$ für $0 < \rho \leqslant 1$

stets eine Lösung von (1) - (3), aber auch

$$(5) \qquad \varphi(x) = c^i \text{ mit } 0 < c \leqslant 1 \text{ und } x = p^i \frac{a}{b} \text{ mit}$$

$$(p, a) = (p, b) = 1 \quad \text{für jede Primzahl } p$$

löst (1) - (3), wie bereits Hensel [11] erkennt. Schließlich beweist Ostrowski [26] (siehe auch Artin [2]), daß mit (4) und (5) schon alle Lösungen erfaßt sind. Spätestens hier erwies sich die von Kürschak eingeführte Begriffsbildung von Bewertungen als hilfreich und wird nun Anlaß zu einer eigenständigen Theorie: der Bewertungstheorie. Im nächsten Kapitel sollen die für unsere Zwecke notwendigen Grundbegriffe zusammengestellt werden.

1. Bewertungstheorie und Bewertungsringe

Von Bedeutung für die Konstruktion der reellen Zahlen bzw. p-adischen Zahlen sind, wie in 0. ausgeführt, Funktionen der rationalen Zahlen in den reellen Zahlkörper mit (1) - (3). Das führt uns in naheliegender Weise zu der folgenden Definition:

1.1 Definition: Unter einer *Bewertung* φ eines (kommutativen) Körpers K verstehen wir eine Abbildung $\varphi : K \to P$ in einen angeordneten Körper P mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\varphi(a) > 0$ für alle $a \neq 0$, $\quad \varphi(0) = 0$

(ii) $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$

(iii) $\varphi(a + b) \leqslant \varphi(a) + \varphi(b)$.

Das klassische Ergebnis von Ostrowski besagt somit, daß jede Bewertung des Körpers der rationalen Zahlen ($K = \mathbb{Q}$, $P = \mathbb{R}$) von der Gestalt (4) oder (5) ist.

Nun scheinen Bewertungen $\varphi_1(x) = |x|^{\rho_1}$, $\varphi_2(x) = |x|^{\rho_2} (\rho_1 \neq \rho_2)$ nicht wesentlich verschieden voneinander zu sein. Damit kommen wir zwangsläufig zu dem Begriff der Äquivalenz von Bewertungen.

1.2 Definition: Bewertungen $\varphi_1, \varphi_2 : K \to P$ heißen *äquivalent*, falls für jede Folge (a_n)

$$(6) \qquad \varphi_1 - \lim_{n \to \infty} a_n = 0 \qquad \varphi_2 - \lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

Die wohlbekannte Grenzwertdefinition (mit dem Absolutbetrag als Bewertung von $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$) übertrage man auf beliebige Bewertungen. In diesem Sinne sind die Bewertungen $\varphi_1(x) = |x|^{\rho_1}$, $\varphi_2(x) = |x|^{\rho_2}$ äquivalent. Schließlich ist (p^n) eine Nullfolge bzgl. der p-adischen Bewertung, keine Nullfolge jedoch für eine p'-adische $(p' \neq p)$ oder die Absolutbetragsbewertung.

Halten wir dieses Ergebnis fest:

1.3 Satz: *Eine nichttriviale Bewertung φ des Körpers $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist entweder zur gewöhnlichen Absolutbetragsbewertung oder zur p-adischen Bewertung $\varphi(x) = \left(\frac{1}{p}\right)^i$ (siehe (5)) für eine Primzahl p äquivalent.*

Dabei verstehen wir unter der trivialen Bewertung die Abbildung φ mit $0 \mapsto 0$ und für alle $x \neq 0 : x \mapsto 1$.

Die p-adischen Bewertungen unterscheiden sich von der Absolutbetragsbewertung darin, daß sie einer stärkeren Dreiecksungleichung, nämlich

(7) $\quad \varphi(a + b) \leqslant \max \quad \{\varphi(a), \varphi(b)\} \qquad$ für alle $a, b \in K$

genügen. Wir sagen: φ erfüllt die ***ultrametrische Dreiecksungleichung***.

1.4 Definition: Genügt eine Bewertung φ der ultrametrischen Dreiecksungleichung, so heißt φ ***nichtarchimedische Bewertung***. Ansonsten sprechen wir von einer ***archimedischen Bewertung***.

Die Bezeichnung erscheint etwas unglücklich, weil damit nichts über die Archimedizität oder Nichtarchimedizität der Ordnungsrelation in P ausgesagt werden soll; sie hat sich aber in der Literatur eingebürgert.

Für archimedische Bewertungen gilt nun der von Ostrowski bewiesene Satz (siehe auch [31]).

1.5 Satz: *Ein archimedisch bewerteter Körper ($P = \mathbb{R}$) ist zu einem mit gewöhnlichen Absolutbeträgen bewerteten Unterkörper der komplexen Zahlen isomorph. Der zugehörige Isomorphismus respektiert auch die Bewertung.*

Insofern können die archimedisch bewerteten Körper und ihre Eigenschaften (zumal es nur zwei vollständige Körper, nämlich $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ gibt) als bekannt angenommen werden. *Unser Hauptaugenmerk wird daher auf die nichtarchimedische Bewertungstheorie gerichtet sein, zumal erst hier das Konzept, Bewertungsringe anstelle der Körper zu untersuchen, fruchtbar wird.*

Im Falle, daß φ nichtarchimedische Bewertung ist, wird (siehe Def. 1.1) nur von der Multiplikation in P Gebrauch gemacht, so daß eine Abschwächung der in 1.1 geforderten Eigenschaften naheliegt. Wendet man auf die Werte bei der p-adischen Bewertung noch die Abbildung $-\log_p$ an, so hat somit das Element $p^i \frac{a}{b}$ $((p, a) = (p, b) = 1)$ den „Wert" i und die Bedingungen (ii) bzw. (7) schreiben sich als

(8) $\quad v(a \cdot b) = v(a) + v(b)$

(9) $\quad v(a + b) \geqslant \min \{v(a), v(b)\}$,

wobei $v = (-\log_p) \circ \varphi$. Es wird dabei „nach dem Exponenten bewertet".

Hier setzt nun die von Krull [18] eingeführte „allgemeine" Bewertungstheorie ein, indem er Bewertungen in größerem Rahmen sieht und anstelle von $-\log_p(P\setminus\{0\}) = v(K\setminus\{0\}) = \mathbb{R}$ von einer beliebigen linear geordneten Gruppe als Wertebereich der Bewertung ausgeht.

1.6 Definition: Eine Abbildung $v : K\setminus\{0\} \to G$ eines (kommutativen) Körpers K in eine linear geordnete (kommutative) Gruppe G heißt *Exponenten-* oder *Krullbewertung*, falls sie den folgenden Bedingungen genügt:

(i) $v(a \cdot b) = v(a) + v(b)$

(ii) $v(a + b) \geqslant \min\{v(a), v(b)\}$.

Es hat sich eingebürgert, die Verknüpfung in G additiv zu schreiben. Außerdem bezeichnet im folgenden v stets eine Exponentenbewertung, während φ für Bewertungen im Sinne von 1.1 gebraucht werden wird.

Schließlich erkennt man, daß nichtarchimedische Bewertungen im Sinne von 1.1 als Exponentenbewertungen interpretiert werden können.

Unmittelbar mit 1.6 erhält man, daß die Menge $\{x \in K \mid v(x) \geqslant 0\} \cup \{0\}$ additiv als auch multiplikativ abgeschlossen ist.

1.7 Definition: Es sei v Bewertung des Körpers K. Dann heißt $B = \{x \in K \mid v(x) \geqslant 0\} \cup \{0\}$ der *Bewertungsring* von v in K.

1.8 Beispiele: 1. Es sei $\mathbb{C}(z)$ der Körper der rationalen Funktionen über $\mathbb{C}$. Jede rationale Funktion h ist darstellbar als Quotient zweier Polynome f, g. Insbesondere existiert stets eine (nicht reduzierbare) Darstellung der Gestalt

$$h(z) = z^i \frac{f_1(z)}{g_1(z)} \text{ mit Polynomen } f_1, g_1,$$

die der Bedingung $f_1(0) \neq 0 \neq g_1(0)$ genügt. Ist $i > 0$, so sagt man: h habe an der Stelle $0 \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle i-ter Ordnung, im Falle $i < 0$ einen Pol i-ter Ordnung, während für $i = 0$ h bei 0 nicht verschwindet und endlich ist. Wie man sich leicht überlegt, definiert die Zuordnung $v : h \to i$ eine Bewertung des Körpers der rationalen Funktionen mit der Wertegruppe $G = \mathbb{Z}$ (siehe z.B. [29], [7]). Der Bewertungsring besteht somit aus allen bei 0 holomorphen rationalen Funktionen.

2. Es sei K der Körper der meromorphen Funktionen über $\mathbb{C}$, also Funktionen über $\mathbb{C}$, die bis auf (im Endlichen sich nicht häufende) Pole holomorph sind. Jede dieser Funktionen denke man sich am Nullpunkt in eine Laurent-Reihe $\sum\limits_{i>-\infty}^{\infty} a_i z^i$ entwickelt. Einer solchen Reihe ordnen wir den z-Exponenten zu, dessen zugehöriger Koeffizient als erster nicht verschwindet. Wiederum erhält man eine Bewertung mit der gleichen inhaltlichen Interpretation wie oben. Hier besteht der Bewertungsring aus den meromorphen Funktionen, die bei 0 keinen Pol besitzen. Analog kann man die Laurent-Entwicklung an anderen Stellen vornehmen, wobei man durchaus unterschiedliche Bewertungsringe erhält.

Wir bemerken noch, daß man auch umgekehrt aus der Kenntnis des Bewertungsringes B den Körper K und im wesentlichen (d.h. bis auf Äquivalenz) die Bewertung v rekonstruieren kann, so daß der vorgelegte Bewertungsring mit dem aus der konstruierten Bewertung übereinstimmt (siehe z.B. [29]). Bewertungsringe sind somit in gewisser Weise die Invarianten der Klassen äquivalenter Bewertungen. Damit haben wir nichtarchimedische Bewertungen und Bewertungsringe als gleichwertiges Konzept erkannt.

Zum Schluß wollen wir eine weitere Betrachtungsweise vorstellen: das *Konzept der Stellen*. Die in Beispiel 1.8 untersuchten Bewertungsringe hätten wir auch wie folgt kennzeichnen können:
Jeder Funktion $h \in \mathbb{C}(z)$ ordnen wir ihren Funktionswert an einer (festen) Stelle z_0 zu:

$$\pi(h) = h(z_0).$$

Ist h bei z_0 singulär, so setzen wir $h(z_0) = \infty = \pi(h)$. Schließlich sei $\pi(\infty) = \infty$ und wir haben damit eine Abbildung π von $\mathbb{C}(z) \cup \{\infty\}$ in $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ erhalten, die den Bedingungen

(10) Sind $x + y$, $\pi(x) + \pi(y)$ definiert, dann ist
$\pi(x + y) = \pi(x) + \pi(y)$

(11) Sind $x \cdot y$, $\pi(x) \cdot \pi(y)$ definiert, dann ist
$\pi(x \cdot y) = \pi(x) \cdot \pi(y)$

(12) Es gibt $x \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $\pi(x) = 1$,

genügt.

1.9 Definition: Unter einer *Stelle π des Körpers K in den Körper L* verstehen wir eine Abbildung $\pi : K \cup \{\infty\} \to L \cup \{\infty\}$, die (10) - (12) genügt. Dabei setzt man:

$$x + \infty = \infty + x = \infty \quad \text{für alle } x \in K$$
$$x \cdot \infty = \infty \cdot x = \infty \quad \text{für alle } x \in K \cup \{\infty\} \setminus \{0\}$$
$$0^{-1} = \infty, \infty^{-1} = 0, -\infty = \infty \quad \text{(siehe z.B. [7, S. 53])}$$

(Man beachte: $\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$, $\infty \cdot 0$ sind nicht definiert.)

Ohne Schwierigkeiten erkennt man, daß $B = \{x \in K \mid \pi(x) \in L\}$ ein Bewertungsring ist.

2. Bewertungsringe als Ringe

Bislang waren Bewertungsringe stets in enger Verbindung mit Bewertungen von Körpern aufgetreten. Wir suchen im folgenden eine (einfache) ringtheoretische Kennzeichnung.

Zunächst sollten die zur Diskussion stehenden Ringe – Bewertungsringe sind Unterringe von Körpern – nullteilerfrei sein. Ist B Bewertungsring im Körper K und $x \in K \setminus B$, so ist sicher $v(x) < 0$, also, weil $v(1) = v(1) + v(1) = 0$ ist, folgt $v(x^{-1}) > 0$, d.h. $x^{-1} \in B$. Somit liegt stets x oder x^{-1} in einem Bewertungsring. Seien nun $x, y \in B$, so erhält man mit obiger Überlegung $xy^{-1} \in B$ oder $yx^{-1} \in B$, d.h. es existiert $a \in B$ mit $x = ay$ oder es existiert ein $b \in B$ mit $bx = y$. Im ersten Fall ist $Bx \subseteq By$, im zweiten $By \subseteq Bx$. Daher sind je zwei Hauptideale des Ringes B (durch Inklusion) vergleichbar und somit je zwei Ideale.

Im Einklang mit 1.7 definieren wir:

2.1 Definition: Ein nullteilerfreier (kommutativer) Ring B ist ein *Bewertungsring*, falls für je zwei Elemente $x, y \in B$ stets gilt: es existiert $a \in B$ mit : $x = ay$ oder es existiert $b \in B$ mit $y = bx$.

Wie man von einem Ring B mit obigen Eigenschaften zur Bewertung eines Körpers kommt, entnehme man z.B. [18].

Halten wir das folgende fest: ein wesentliches Charakteristikum eines Bewertungsringes ist die *lineare Ordnungsstruktur des Idealverbandes.*

2.2 Beispiele: 1. Der zu einer p-adischen Bewertung v_p der rationalen Zahlen gehörende Bewertungsring B besteht aus rationalen Zahlen der Gestalt

$p^i \frac{a}{b}$ mit $i \in \mathbb{N}_0$ und $(p, a) = 1 = (p, b)$. Offensichtlich ist

$B \supset pB \supset p^2B \supset \ldots \supset p^nB \supset \ldots \supset (0)$, d.h. der Hauptidealverband (alle Ideale sind Hauptideale) ist vom Ordnungstyp der natürlichen Zahlen.

2. Entsprechendes wie in 1. gilt für die in 1.8 beschriebenen Bewertungsringe im Körper der rationalen Funktionen bzw. meromorphen Funktionen.

3. Bildet man (formale) Laurent-Reihen, allerdings nun mit rationalen Exponenten (anstelle der ganzen Zahlen), wobei die zugehörenden nichtverschwindenden Koeffizienten in Bezug auf die Ordnung in $\mathbb{Q}$ (wie vorher) vom Ordnungstyp der natürlichen Zahlen sind, so erhält man bei einer Exponentenbewertung (der Wert einer solchen Laurent-Reihe ist die kleinste rationale Zahl mit nichtverschwindendem Koeffizient) einen Bewertungsring, dessen Idealverband allerdings nicht mehr diskret ist [29].

Dem Beispiel 3 entsprechende Verfahren führen zu

2.3 Satz (Krull) [18]: *Zu jedem Positivbereich einer linear geordneten Gruppe gibt es Bewertungsringe, deren Hauptidealverband ordnungsisomorph zum Positivbereich der vorgelegten linear geordneten Gruppe ist.*

Ordnungstheoretische Eigenschaften der linear geordneten Gruppe (z.B. konvexe Untergruppen) spiegeln sich dann in ringtheoretischen Eigenschaften wider [29].

Ein weiteres Charakteristikum, was wir im folgenden noch mehrmals ansprechen werden, sind *Vollständigkeitseigenschaften* gewisser Bewertungsringe und die sich daraus ergebenden Konsequenzen.

Wie wir bereits dargelegt haben, besitzen Bewertungen gerade jene funktionalen Eigenschaften des Absolutbetrages, der wiederum zur Definition von Filtern bzw. der Konvergenz benutzt wird. Insofern ist die folgende

Definition unter Berücksichtigung des Übergangs von φ zur Exponentenbewertung v natürlich.

2.4 Definition: Eine Folge (a_n) aus Elementen eines Bewertungsringes B heißt *Cauchy-konvergent*, wenn für jedes Hauptideal Bx eine natürliche Zahl m existiert, so daß für alle $k, l \geqslant m$ stets $a_k - a_l \in Bx$ ist.

Entsprechend heißt ein Bewertungsring B *vollständig*, falls jede Cauchy-konvergente Folge einen Grenzwert B besitzt. Man zeigt ferner, daß jeder Bewertungsring B eine Vervollständigung $\overline{B}$ besitzt, die ebenfalls ein Bewertungsring ist. B läßt sich somit in einen Bewertungsring $\overline{B}$ einbetten, der überdies

(13) die gleiche Idealstruktur wie B und

(14) gleichen Restklassenkörper $(B/_{J(B)} \cong \overline{B}/_{J(\overline{B})})$

besitzt. Erweiterungen mit (13) und (14) nennt man *unmittelbar*.

Allgemein interessieren daher Oberringe von Bewertungsringen (die natürlich auch Bewertungsringe sind), die den Bedingungen (13) und (14) genügen.

Ein solcher Ringerweiterungsprozeß (mit (13) und (14) als Nebenbedingungen) bricht, wie man mit erheblichem Aufwand zeigen kann [29], schließlich ab, d.h. man erhält einen *maximal vollständigen* Bewertungsring, der keine unmittelbare (echte) Erweiterung zuläßt.

Ist der Ordnungstyp des Hauptidealverbandes diskret, so fallen beide Begriffe: vollständig und maximal vollständig zusammen. Ansonsten (siehe [29, S. 32]) gibt es vollständige Bewertungsringe, die nicht maximal vollständig sind. Der p-adische Zahlkörper läßt sich als jener Quotientenkörper kennzeichnen, der aus einer Vervollständigung des Bewertungsringes aus 2.2.1 hervorgegangen ist.

Entsprechend ist der Bewertungsring in 1.8.2 („meromorphe Funktionen") maximal vollständig im Hinblick auf den in 1.8.1 diskutierten („rationale Funktionen").

3. Nichtarchimedische Analysis/Funktionalanalysis

Im Abschnitt 0 hatten wir aufgezeigt, daß die Entwicklung der Bewertungstheorie als eigenständige Theorie in dem Moment begann, als man erkannte, daß viele Fakten ihre Ursache lediglich in den formalen Eigenschaften von Bewertungen haben.

In gleicher Weise war auch die Beobachtung in der Analysis, daß viele Beweise nur von den formalen Eigenschaften des Absolutbetrages Gebrauch machen, Ausgangspunkt einer Reihe von Untersuchungen. Auf zwei Forschungsrichtungen möchten wir hinweisen.

3.1 Funktionentheorie

Nach dem Ergebnis von Ostrowski [26] können alle archimedisch bewerteten Körper als Unterkörper des komplexen Zahlkörpers $\mathbb{C}$ angesehen werden. Da es sinnvoll erscheint, Analysis über vollständigen Körpern zu treiben, bleiben lediglich der Körper der reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ selbst übrig, man befindet sich somit im Gebiet der klassischen Analysis.

Insofern ist für unsere Zwecke eine Beschränkung auf nichtarchimedisch bewertete Körper von Interesse, die aber – damit man sinnvoll Analysis treiben kann – als vollständig vorausgesetzt werden. (Der Leser möge dabei z.B. zunächst an den Körper der p-adischen Zahlen denken.)

Nach den Feststellungen von Remmert [28] scheint die erste größere Arbeit über die Funktionentheorie mit nichtarchimedisch bewertetem Grundkörper die Dissertation von Schöbe aus dem Jahre 1930 zu sein, deren Resultate lange unbekannt geblieben und später von anderen – zum Teil auf komplizierterem Wege – neu bewiesen wurden.

„Weiterführende Ergebnisse verdankt man u.a. M. Krasner und M. Lazard. Eine einfache Herleitung der klassischen Resultate der Funktionentheorie einer Veränderlichen gab U. Güntzer [10]" (siehe [28]).

Daß eine Funktionentheorie über einem nichtarchimedisch bewerteten Körper „eigenwillige" Züge trägt, macht das folgende Lemma deutlich:

3.1.1 Lemma: Die unendliche Reihe $\Sigma\, a_i$ konvergiert genau dann (in der durch die Bewertung induzierten Topologie), falls $\lim a_i = 0$.

Daher ist für Potenzreihen die naheliegende Folgerung zu ziehen.

3.1.2 Folgerung: Eine Potenzreihe $\Sigma\, a_i z^i$ konvergiert entweder für alle Punkte z einer Sphäre $\{ z \mid \varphi(z) = t \}$ oder für keinen Punkt der Sphäre.

Dazu kommt, daß nichtarchimedisch bewertete Körper total unzusammenhängend sind. „Also ist die Klasse derjenigen Funktionen, die lokal eine Potenzreihenentwicklung gestatten, viel zu groß, um eine der klassischen Theorie ähnliche zu liefern, z.B. gilt für solche Funktionen kein Identitätssatz." [10]

Um etwa klassische Sätze übertragen zu können, muß der Grundkörper K starken Einschränkungen unterworfen werden. Insbesondere sollte K *nicht* lokal kompakt sein. Ein nichtarchimedisch bewerteter, vollständiger Körper ist genau dann lokal kompakt, wenn die Idealstruktur des zugehörenden Bewertungsrings diskret und der entsprechende Restklassenkörper (nach dem maximalen Ideal) endlich ist. (Somit ist der p-adische Zahlkörper $\mathbb{Q}_p$ ein lokal kompakter Körper.)

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, erwähnen wir ein Ergebnis aus [10], das die Bedeutung der Struktur des Idealverbandes hervorhebt.

3.1.3 Lemma: Ist die Bewertung von K nicht diskret, so gilt in einer Funktionentheorie über K das Analogon zum Satz von Liouville, d.h. eine Potenzreihe, die für alle $x \in K$ konvergiert und beschränkt ist, ist eine Konstante.

3.2 Funktionalanalysis

Die übliche Definition eines normierten Raumes benutzt wesentlich Eigenschaften des Absolutbetrages. Wie schon mehrfach betont, stellte sich auch hier die Frage nach einer möglichen Verallgemeinerung, wodurch das „Eigentliche" verschiedener Begriffsbildung stärker herausgearbeitet werden konnte.

Erste Untersuchungen über normierte Räume mit nichtarchimedisch bewertetem Körper gehen auf Monna (1943) [25] zurück.

3.2.1 Definition [28]: Unter einem *nichtarchimedisch normierten Raum E* über dem Körper K verstehen wir einen linearen Raum E über K, wobei $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ eine Abbildung von E nach $\mathbb{R}$ und $| \ | : K \to \mathbb{R}$ eine Bewertung von K ist, die den folgenden Bedingungen genügen:

(i) $\|x\| > 0$ für alle $x \neq 0, x \in E$

(ii) $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$ für $a \in K, x \in E$

(iii) $\|x + y\| \leqslant \max \{\|x\|, \|y\|\}$ für alle $x, y \in E$.

Da die Norm (siehe oben) als reellwertig vorausgesetzt wird, ist (ii) nur dann sinnvoll, wenn $|a|$ stets reell ist; gerade die nichtarchimedischen Bewertungen vom Range 1 erfüllen diese Nebenbedingung. Dabei sei die Bewertung gemäß Definition 1.1 geschrieben.

Weil im allgemeinen $\|E\| \neq |K|$ ist, lassen sich Elemente $x \in E$ nicht notwendigerweise normieren. Schließlich sei weiter vorausgesetzt, daß K bzgl. $| \ |$ vollständig bewertet ist.

Wie üblich erklärt man die Äquivalenz von Normen: Zwei Normen $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ heißen äquivalent, falls es $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gibt, so daß stets

$$\alpha \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \beta \|x\|_1 .$$

Ähnlich wie für normierte Räume über den reellen Zahlen, d.h. für archimedisch bewertete Körper, erhält man das folgende Lemma.

3.2.2 Lemma: In einem endlich dimensionalen, nichtarchimedisch normierten Raum E sind je zwei Normen äquivalent.

Aus dem für die Funktionalanalysis wesentlichen Satz von Hahn-Banach

Jedes stetige Funktional auf einem Unterraum eines reellen normierten Raumes läßt sich linear und mit der gleichen Norm auf den gesamten Raum fortsetzen,

werden im Falle der nichtarchimedisch bewerteten Körper deren eigenwilligen Züge deutlich.

Der Satz von Hahn-Banach ist Spezialfall einer allgemeineren Fortsetzungseigenschaft:

(15) Sei E ein normierter Raum. Wir sagen: E hat die Fortsetzungseigenschaft, falls für jeden Unterraum S eines Raumes X und für jede

lineare stetige Abbildung $f : S \to E$ eine lineare, stetige Abbildung $F : X \to E$ mit gleicher Norm existiert, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & X \arrow[d, dashed, "F"] \\ & E \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, d.h. $f = F \circ i$.

Nachbin [22] fand in der sogenannten „binären Durchschnittseigenschaft" der Einheitssphären eine notwendige und hinreichende Bedingung für das Erfülltsein von (15). Ein Mengensystem $\mathbb{C}$ hat die „binäre Durchschnittseigenschaft", wenn jedes Teilsystem, in dem je zwei Elemente sich schneiden, nichtleeren Durchschnitt hat.

Mit Hilfe der von Nachbin entwickelten Techniken konnten Cohen [5] und Ingleton [12] auch nichtarchimedische normierte Räume erschöpfend behandeln.

Die binäre Durchschnittseigenschaft läßt sich idealtheoretisch als Lösbarkeitsbedingung für unendliche, paarweise lösbare Kongruenzsysteme (siehe auch Kapitel 4) interpretieren, was den folgenden Satz plausibel macht.

3.2.3 Satz: *Ein nichtarchimedisch normierter Raum E über dem K besitzt die Hahn-Banach-Eigenschaft genau dann, wenn der zu K gehörende Bewertungsring maximal vollständig ist.* [12, Th. 3], [23, S. 36].

Während, wie schon in Kapitel 2 erwähnt, diskrete Bewertungen, die vollständig sind, auch maximal vollständige Bewertungsringe induzieren, muß i.a., um 3.2.3 zu gewährleisten, an den Körper jene stärkere Vollständigkeitsforderung gestellt werden. Beispiele, daß jene beiden Vollständigkeitsbegriffe nicht zusammenfallen, findet man sowohl bei Schilling als auch in der Arbeit von Cohen [5].

4. Bewertungsringe in der Algebra

Bewertungsringe sind *lokale* Ringe, also Ringe, die *genau ein maximales Ideal* besitzen und insofern äußerst spezielle Objekte. Dennoch ist ihre Bedeutung nicht unerheblich und dies hat seine Ursache im Lokal-Global-Prinzip oder wie das technische Schlagwort heißt: Lokalisation.

Diese weitreichende Methode der Algebra besteht nun darin, vorgegebene Ringe in hinreichend viele lokale Ringe einzubetten und aus den Eigenschaften dieser lokalen Oberringe auf Charakteristika des ursprünglichen Rings zu schließen.

Grob vereinfacht läßt sich die Idee zur Konstruktion von lokalen Oberringen wie folgt beschreiben: Ist M ein maximales Ideal des Ringes R, so werden in dem (zu konstruierenden) Oberring R_M alle Elemente $x \notin M$ zu Einheiten. (Man denke an $\mathbb{Z} = R$, $p\mathbb{Z} = M$ für eine Primzahl p und

$$R_M = \{\frac{a}{b} \mid \text{es gibt } \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \text{ mit } p \nmid d\}.)$$

Auf hinreichende Bedingungen für die Existenz von Oberringen R_M wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen (siehe z.B. den Übersichtsartikel von P.M. Cohn [6]). Im allgemeinen ist der Oberring R_M als lokaler Ring in seiner Struktur besser zugänglich. Besitzen nun sämtliche Quotientenringe R_M (für jedes beliebige maximale Ideal) eine bestimmte Eigenschaft (triviales Beispiel: $x \in R$ ist in sämtlichen Oberringen R_M invertierbar) und überträgt sich diese auf die Oberringe, d.h. ist diese invariant unter Lokalisation, so weist auch R diese Eigenschaft auf (hier: $x \in R$ ist auch in R invertierbar).

Im folgenden werden wir darlegen, daß „interessante" Ringe oftmals, lokal gesehen, Bewertungsringe sind.

4.1 Idealtheorie, Dedekind-Ringe, Prüfer-Ringe, arithmetische Ringe

Der ursprüngliche Ausgangspunkt für das, was wir heute als Idealtheorie bezeichnen, war die Zahlentheorie und hier insbesondere die Fermatsche Vermutung

(F_n): $x^n + y^n = z^n$

hat keine ganzzahligen Lösungen ($n \geqslant 3$). [3, S. 173ff.].

Kummer erkannte in der Mitte des vorigen Jahrhunderts, daß diese Frage eng mit dem Problem der eindeutigen Primfaktorzerlegungen in algebraischen Erweiterungen $\mathbb{Z}[\epsilon]$ mit Einheitswurzeln ϵ des Ringes der ganzen Zahlen verknüpft ist. Wohlbekannt ist die Tatsache, daß in elementar zugänglichen Ringen, z.B. $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ nicht mehr der Satz von der eindeutigen Primfaktorzerlegung gilt: So ist

$$9 = 3 \cdot 3 = (2 + i\sqrt{5})(2 - i\sqrt{5}).$$

Die grundlegende Idee von Kummer bestand darin, geeignete Elemente des Ringes zu neuen Objekten, den „idealen Zahlen" zusammenzufassen, um zu erreichen, daß in dieser Menge eine entsprechende Primfaktorzerlegung eindeutig wird. Für das oben erwähnte Beispiel bedeutet dies: Ersetzt man 9 durch das von diesem Element erzeugte Ideal, so gilt $(9) = P^2Q^2$ mit $P = (3, 2 + i\sqrt{5})$, $Q = (3, 2 - i\sqrt{5})$. Dabei sind P, Q Primideale und die Zerlegung $(9) = P^2Q^2$ ist eindeutig.

Diese Feststellung legt die folgende Definition nahe:

4.1.1 Definition (siehe z.B. [21]): Ein nullteilerfreier (kommutativer) Ring heißt *Dedekind-Ring*, falls jedes Ideal Produkt von Primidealen ist.

Diese Produktzerlegung ist eindeutig [32]. Beispiele von Dedekind-Ringen findet der Leser etwa in [33] oder [21].

Wesentlich für unsere Intentionen ist nun der folgende Kennzeichnungssatz.

4.1.2 Satz [21]: *Für einen nullteilerfreien, noetherschen (kommutativen) Ring R sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) *R ist ein Dedekind-Ring.*

(ii) *Für jedes maximale Ideal M ist der Quotientenring R_M ein diskreter Bewertungsring.*

Ohne die Definition einer weiteren zentralen Klasse von Ringen, nämlich der *Prüfer-Ringe* [21] anzugeben (die „Definition" steht in Satz 4.1.5), zitieren wir noch den folgenden Satz.

4.1.3 Satz [21, 6.7]: *Für einen nullteilerfreien (kommutativen) Ring R sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) *R ist ein Prüfer-Ring.*

(ii) *Für jedes maximale Ideal M ist der Quotientenring R_M ein Bewertungsring.*

Prüfer-Ringe lassen sich auch idealverbandstheoretisch charakterisieren. Setzt man

4.1.4 Definition [13]: Ein (kommutativer) Ring R heißt *arithmetisch*, falls die Ideale von R einen distributiven Verband bilden,
dann erhält man:

4.1.5 Satz [13]: *Ein nullteilerfreier (kommutativer) Ring R ist genau dann arithmetisch, wenn R Prüfer-Ring ist.*

Somit ist sowohl die Existenz von Primfaktorzerlegungen von Idealen als die verbandstheoretische Bedingung der Distributivität Ausfluß ein und derselben lokalen Eigenschaft: R_M ist ein Bewertungsring.

4.2 Elementarteiler-Ringe (ED-Ringe)

Für Matrizen A über einem Körper K gibt es stets invertierbare Matrizen P, Q, so daß PAQ eine Diagonalmatrix ist. Es ist schon lange bekannt, daß eine entsprechende Aussage auch für den Ring der ganzen Zahlen bzw. für Polynomringe in einer Unbestimmten über Körpern gilt. Schließlich dehnten Jacobson und Teichmüller dieses Ergebnis auch auf nullteilerfreie Hauptidealringe aus.

Kaplansky stellte sich 1949 die Aufgabe, die Klasse der Ringe mit der oben genannten Eigenschaft zu charakterisieren, setzte somit als Definition

4.2.1 Definition [14]: Ein (kommutativer) Ring R heißt *Elementarteiler-Ring* (*ED*-Ring – *elementary divisor ring*), falls jede Matrix über R zu einer Diagonalmatrix äquivalent (im obengenannten Sinne) ist,

und leitete damit das Studium der *ED*-Ringe ein.

Mit vollständiger Induktion läßt sich zeigen, daß es ausreicht, die Eigenschaft aus 4.2.1 nur bei 1×2, 2×1, 2×2-Matrizen zu studieren. Ringe, bei denen die 2×1- bzw. 1×2-Matrizen sich diagonal reduzieren lassen, nennt man *Hermite-Ringe* [20]. Somit sind *ED*-Ringe auch Hermite-Ringe. Kaplansky erkannte, daß ein lokaler *ED*-Ring, d.h. ein *ED*-Ring mit genau einem maximalen Ideal, ein Bewertungsring sein muß. Umgekehrt sind natürlich Bewertungsringe *ED*-Ringe [14].

Bis heute ist allerdings keine globale Charakterisierung der *ED*-Ringe bekannt. Larsen/Lewis/Shores [20] bewiesen:

4.2.2 Satz: *Für einen (kommutativen) Ring R sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) *R ist ein ED-Ring.*

(ii) *Jeder endlich präsentierbare R-Modul ist direkte Summe von zyklischen Untermoduln.*

(Ein R-Modul M heißt endlich präsentierbar, falls $M = R^{(n)}/K$ für einen endlich erzeugten Untermodul K des freien Moduls $R^{(n)}$)

und konnten dadurch die *ED*-Ringe in der Klasse der semilokalen Ringe (endlich viele maximale Ideale) kennzeichnen.

4.2.3 Satz: *Für einen semilokalen (kommutativen) Ring sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) *R ist ein arithmetischer Ring.*

(ii) *R ist ein ED-Ring.*

(iii) *R ist ein Hermite-Ring.*

(iv) *R ist ein Bezout-Ring (jedes endlich erzeugte Ideal ist ein Hauptideal).*

Somit sind wiederum Bewertungsringe (siehe 4.2.3 (i)) als die lokalen Strukturen von Bedeutung.

Offen ist ferner das Problem, ob wenigstens im nullteilerfreien Fall die Bedingung (iv) kennzeichnend ist.

4.3 FGC-Ringe

In 4.2 begegneten wir einem wesentlichen Hilfsmittel der Ringtheorie, nämlich Ringe durch die Eigenschaften der zugehörigen Modul-Kategorie zu kennzeichnen. So entspricht der ringtheoretischen Charakterisierung der *ED*-Ringe eine spezifische Zerlegungseigenschaft gewisser Moduln über solchen Ringen. Moduln sind bekanntlich naheliegende Verallgemeinerungen von Vektorräumen. Daher haben auch klassische Resultate der linearen Algebra oftmals Pate gestanden für Fragestellungen der Modultheorie. Beispiel: Jeder endlich erzeugte Vektorraum ist direkte Summe von eindimensionalen (zyklischen) Unterräumen.

Man setzte also:

4.3.1 Definition: Ein (kommutativer) Ring R heißt *FGC-Ring R* (*f*initely *g*enerated-*c*yclic), falls jeder endlich erzeugte R-Modul direkte Summe von zyklischen Untermoduln ist.

In 4.2.2 tauchten Ringe mit einer ähnlichen Zerlegungseigenschaft wie in 4.3.1 auf. Da jeder endlich präsentierbare R-Modul endlich erzeugt ist, nicht jedoch umgekehrt, ist die dortige Bedingung an die Modulkategorie einschränkender als die in 4.3.1, so daß seinerseits die Klasse der *FGC*-Ringe „kleiner" als die der *ED*-Ringe sein muß.

Für die Klasse der lokalen, nullteilerfreien (kommutativen) Ringe charakterisierte Kaplansky 1952 [15] einen *FGC*-Ring als einen fastmaximal vollständigen Bewertungsring. (Ein Bewertungsring heißt fastmaximal vollständig, wenn jedes echte epimorphe Bild maximal vollständig ist.) Gill [9] konnte schließlich auch ein analoges Ergebnis für den Fall, daß R Nullteiler besitzt, herleiten.

4.3.2 Satz: *Für einen lokalen (kommutativen) Ring R sind die folgenden Bedingungen äquivalent:*

(i) *R ist ein FGC-Ring.*

(ii) *R ist ein fastmaximal vollständiger Bewertungsring.*

Eine globale Charakterisierung steht zur Zeit noch aus. Zwar weiß man, daß *FGC*-Ringe *Bezout-Ringe* sein müssen [20] und außerdem bleibt die Eigenschaft „FGC" bei Lokalisationen erhalten, so daß mit 4.3.2 R_M lokal ein fastmaximal vollständiger Bewertungsring sein muß; doch gibt es Beispiele [20], die zeigen, daß diese Eigenschaften nicht hinreichend und weitere Zusatzbedingungen nötig sind.

5. Bewertungsringe in der Geometrie

Bislang haben wir unsere Darlegungen auf den Fall beschränkt, daß Bewertungsringe kommutative Ringe sind. Das war insbesondere auch dadurch gerechtfertigt, daß die Bewertungstheorie Bestandteil der kommutativen Algebra ist, wesentliche Ergebnisse stark von der Kommutativität der Multiplikation in den betrachteten Körpern bzw. Ringen abhängen und darüber hinaus zur Zeit nur wenige Verallgemeinerungen auf den nichtkommutativen Fall bekannt sind.

Gerade in der Geometrie aber erweist sich die Beschränkung auf den kommutativen Fall als hinderlich und von hier kommen daher auch Anstöße, eine nichtkommutative Bewertungstheorie zu entwickeln.

Bekanntlich lassen sich affine Ebenen, in denen der Schließungssatz von Desargues gilt, durch Körper koordinatisieren. Analog gestatten auch desarguessche projektive Ebenen eine Beschreibung durch ein (algebraisches) analytisches Modell. Dabei können wir Punkte als links-homogene, die Geraden als rechts-homogene Tripel (a_1, a_2, a_3) (nicht alle $a_i = 0$) auffassen, wobei die Elemente a_i aus dem Koordinatenkörper a_i sind. Die Inzidenz ist über das Verschwinden des jeweiligen Skalarprodukts definiert. Genau dann ist eine solche (desarguessche) Ebene eine Pappos-Ebene, wenn der Koordinatenkörper kommutativ ist. Erst durch die Kenntnis nichtkommutativer Körper konnte Hilbert die Unabhängigkeit der Pappos-Konfiguration von der Desargues-Konfiguration belegen.

Sei bis auf weiteres $\mathsf{P} = \mathsf{P}(K)$ eine papposche projektive Ebene, K also ein kommutativer Körper. Wie bei vielen mathematischen Objekten erhält man durch das Studium der Homomorphismen der vorgelegten Struktur wesentliche Informationen über das betrachtete Objekt. Insofern ist es von Interesse, eine vollständige Übersicht über alle diejenigen projektiven Ebenen P' zu gewinnen, die epimorphe Bilder von P sind. Sofort stellt sich das Problem einer analytischen Beschreibung eines Homomorphismus $\varphi : \mathsf{P}(K) \to \mathsf{P}(L) = \mathsf{P}'$. Dabei verstehen wir unter einem Homomorphismus eine inzidenztreue Abbildung der Punkt- bzw. Geradenmengen auf die jeweiligen Mengen in der Bildebene, so daß (um uninteressante Fälle auszuschließen) das Bild wenigstens ein (nicht entartetes) Viereck enthält. Schließlich kann nur dann eine algebraische Beschreibung eines Homomorphismus erwartet werden, wenn die Koordinatisierungen der Ebenen P, P' „zusammenpassen", d.h. die Bilder eines Basisvierecks in P, nämlich $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1), (1 \in K)$ sollen wieder die entsprechenden Punkte eines Basisvierecks in P (jetzt $1 \in L$!) sein. Damit können wir nun das wesentliche Ergebnis wie folgt formulieren:

5.1 Satz: *Es seien $\mathsf{P}(K)$, $\mathsf{P}(L)$ projektive Pappos-Ebenen.*
Jeder Epimorphismus $\psi : \mathsf{P}(K) \to \mathsf{P}(L)$ induziert eine Stelle π von K in L.
Ist π eine surjektive Stelle von K in L, B der zugehörige Bewertungsring in K, so definiert $\varphi(a_1, a_2, a_3) = (\pi(a_1), \pi(a_2), \pi(a_3))$ für $a_i \in B$ einen Epimorphismus von $\mathsf{P}(K)$ nach $\mathsf{P}(L)$.
(Näheres siehe [1], [8] und [30]).

Gilt ein entsprechendes Ergebnis auch für desarguessche Ebenen, d.h. für nicht notwendig kommutative Körper? Was verstehen wir dann unter einem nicht notwendig kommutativen Bewertungsring?

Nennen wir einen nullteilerfreien Ring, dessen Links- und Rechtsideale durch Inklusion linear geordnet sind, Bewertungsring, so kann man in 5.1 „Pappos-Ebene" durch „desarguessche Ebene" ersetzen, sofern man in naheliegender Weise den Begriff der Stelle verallgemeinert. Dies wurde von Klingenberg [17] bewiesen und von Radó, der wohl Klingenbergs Arbeit nicht kannte, in [27] wiederentdeckt.

Die oben nahegelegte Verallgemeinerung ist allerdings keineswegs zwingend. In dem Buch von Schilling [29] findet man eine andere Verallgemeinerung der Bewertungsringdefinition auf den nichtkommutativen Fall. Hier wird, im Gegensatz zur obigen Version, zusätzlich gefordert, daß sämtliche Ideale zweiseitig sind, d.h. *R ein Duo-Ring*. Dies scheint in vielen Fällen aus beweistechnischen Gründen unumgänglich zu sein. Es war wohl Radó [27], der zuerst zeigte, daß eine solche Eigenschaft eine echte Zusatzbedingung ist oder kurz: daß es Bewertungsringe im Sinne von Klingenberg gibt, die nicht duo sind. Schließlich liefert das Studium von Geometrien über lokalen Ringen [16] auch Argumente, bei der Definition von Bewertungsringen auf die Nullteilerfreiheit zu verzichten, was zu der in [4] erörterten Klasse der Kettenringe (*chain rings*) führt.

Entwickelte sich ursprünglich der Begriff des kommutativen Bewertungsringes aus der Bewertungstheorie, so steht man momentan vor dem umgekehrten Problem, ein geeignetes Konzept einer nichtkommutativen Bewertungstheorie zu entwerfen, das naheliegende Definitionen für (nichtkommutative) Bewertungsringe in eine geschlossene Theorie integriert. Als erste Beiträge sind hier die Arbeiten von Radó [27] und Mathiak [24] anzusehen.

Literatur

[1] André, J.: Über Homomorphismen projektiver Ebenen. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **34** (1969), 98 - 114.

[2] Artin, E.: Über die Bewertungen algebraischer Zahlkörper. Crelles Journal **167** (1932), 157 - 159.

[3] Borewics/Safarevic: Zahlentheorie. Birkhäuser Verlag, Basel, 1966.

[4] Brungs, H.H./Törner, G.: Chain rings and prime ideals. Arch. Math. 27 (1976), 253 - 260.

[5] Cohen, I.S.: On non-Archimedean normed spaces. Indigationes **10** (1948), 244 - 249.

[6] Cohn, P.M.: Rings of fractions. Amer. Math. Monthly **78** (1971), 596 - 615.

[7] Endler, O.: Valuation theory. Springer Verlag, Berlin 1972.

[8] Garner, L.E.: Fields and projective planes: a category equivalence. Rocky Mountain J. **2** (1972), 605 - 610.

[9] Gill, D.T.: Almost maximal valuation rings. J. London Math. Soc. **4** (1971), 140 - 146.

[10] Güntzer, U.: Zur Funktionentheorie einer Veränderlichen über einem vollständigen nichtarchimedischen Grundkörper. Arch. Math. **17** (1966), 415 - 431.

[11] Hensel, K.: Theorie der algebraischen Zahlen. Leipzig, 1908.

[12] Ingleton, A.W.: The Hahn-Banach theorem for nonarchimedean valued fields, Proc. Cambr. Phil. Soc. **48** (1952), 41 - 45.

[13] Jensen, C.U.: Arithmetical rings. Acta Math. Acad. Sci. Hung. **17** (1966), 115 - 123.

[14] Kaplansky, I.: Elementary divisors and modules. Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), 464 - 491.

[15] Kaplansky, I.: Modules over Dedekind rings and valuation rings. Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 327 - 340.

[16] Klingenberg, W.: Projektive Geometrien mit Homomorphismus. Math. Annalen **132** (1956), 180 - 200.

[17] Klingenberg, W.: Projektive und lineare Algebra über verallgemeinerten Bewertungsringen. Alg. und Top. Found. of Geom., Coll, Utrecht 1959.

[18] Krull, W.: Allgemeine Bewertungstheorie. Crelles Journal **167** (1932), 160 - 196.

[19] Kürschak, J.: Über die Limesbildung und allgemeine Körpertheorie. Crelles Journal **142** (1913), 211 - 253.

[20] Larsen/Lewis/Shores: Elementary divisor rings and finitely presented modules. Trans. Amer. Math. Soc. **187** (1974), 231 - 248.

[21] Larsen, M.D./Carthy, P.J.: Multiplicative theory of ideals. Academic Press, New York, 1971.

[22] Nachbin, L.: A theorem of the Hahn-Banach type for linear transformations. Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 28 - 46.

[23] Narici/Beckenstein/Bachmann: Functional analysis and valuation theory. Marcel Dekker, New York 1971.
[24] Mathiak, K.: Bewertungen nichtkommutativer Körper. Erscheint in J. Algebra.
[25] Monna, A.F.: Linear topological spaces over non-Archimedean valued fields. Proceedings of a conference on local fields. NUFFIC Summer School, Springer-Verlag, 1967.
[26] Ostrowski, A.: Über einige Lösungen der Funktionalgleichungen $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(xy)$. Acta Mathematica **41** (1917), 217 - 284.
[27] Radó, F.: Non-injective collineations on some sets in desarguesian projective planes and extension of non-commutative valuations. Aequationes Math. 4 (1970), 307 - 321.
[28] Remmert, R.: Algebraische Aspekte in der nichtarchimedischen Analysis. Proceedings of a conference on local fields. NUFFIC Summer School, Springer-Verlag, 1967.
[29] Schilling, O.F.G.: The theory of valuations. American Mathematical Society, 1950.
[30] Skornjakov, L.A.: Über Homomorphismen projektiver Ebenen und T-Homomorphismen von Temaren (russ.). Mat. Sbornik **43** (1957), 285 - 294.
[31] van der Waerden: Algebra (2. Teil). Springer-Verlag, Berlin, 1967.
[32] Zariski-Samuel: Commutative Algebra II. Van Nostrand, New York, 1960.

Anschrift des Verfassers:

Dozent Dr. Günter Törner
FB Mathematik
Technische Hochschule
Schloßgartenstr. 7

D-6100 Darmstadt