

MATHEMATISCH PHYSIKALISCHE SEMESTERBERICHTE

Zur Pflege des Zusammenhangs von Schule und Universität
begründet 1932 von H. Behnke und O. Toeplitz

NEUE FOLGE BAND XXVII / 1980 HEFT 1

INHALT

Heinrich Behnke † 1

Lothar Kienle · Grenzebenen unbeschränkter Polyeder 4

Hans-Christian Reichel · Zur Entwicklung des Dimensionsbegriffes 16

J. Mennicke · Pflasterung des dreidimensionalen hyperbolischen
Raumes 55

Günter Törner · Angeordnete Körper 69

J. Heine und H. Hensel · Über Pseudodivisibilität und Zerlegbarkeit
torsionsfreier abelscher Gruppen 94

Bernd Reimers · Konstruktion endlicher Funktionengruppen mit ge-
brochen linearen Funktionen 104

Wolf-Rüdiger Heilmann · Ein stochastischer Prozeß als Anlaß zur Be-
trachtung der Cauchyschen Funktionalgleichung im Schulunterricht 138

Peter Bender · Eine Bemerkung zu Derivationen von Potenzreihen 143

Angeordnete Körper

Von GÜNTER TÖRNER¹ in Duisburg

In der vorliegenden Arbeit wird eine elementare Einführung in die Theorie der angeordneten, insbesondere archimedisch angeordneten Körper gegeben. Dabei werden Fragen der Fortsetzbarkeit und Beschreibungen von Anordnungen für einfache Körpererweiterungen behandelt. Mit Hilfe des Begriffes "reeller Zerfällungskörper" charakterisieren wir den Fall, daß sämtliche die Anordnung von k fortsetzende Anordnungen einer Körpererweiterung $K|k$ von Automorphismen des Körpers K aus einer beliebigen Anordnung von K induziert werden. Zahlreiche Beispiele verdeutlichen die Zusammenhänge.

Zwar handelt es sich bei dem folgenden zum Teil um eine Aufarbeitung einiger klassischer (und daher bekannter?) Resultate; in neueren Algebra-Lehrbüchern ist jedoch darüber zumeist so gut wie nichts zu finden, und wenn überhaupt, so steht fast immer der von der Vielfalt möglicher Anordnungen her uninteressante Fall der reell abgeschlossenen Körper im Vordergrund.

Schließlich meinen wir, die Arbeit durch folgende Aspekte zu rechtfertigen: Die Behandlung der klassischen geometrischen Konstruktion mit den Mitteln der Algebra wird oft als eines der Ziele einer Algebra-Vorlesung angesehen. In der Praxis einer einsemestrigen, dreistündigen Veranstaltung allerdings stellt sich dieses Ziel allzu oft als zu "ehrgeizig" heraus; man vergleiche etwa das Buch [3] und

¹ Für zahlreiche anregende Bemerkungen und Hinweise bin ich Prof. Dr. Artmann und Prof. Dr. Pickert dankbar.

Der Autor dankt der Stiftung Volkswagenwerk für die Unterstützung während der Abfassung dieser Arbeit.

den dortigen Hinweis zum Satz von Gauss über n -Ecke: "Wollte man nur ihn beweisen, so könnte man nicht allzuviel in den vorhergehenden Kapiteln übergehen". Daß man hier berechnete Zweifel anmelden kann, hat Laugwitz in [5] aufgezeigt. Wird in der Algebra-Vorlesung dieses "Klassenziel" nicht erreicht, so besteht jedoch die Gefahr, daß viele Begriffsbildungen, insbesondere aus der Körper- und Galoistheorie, steril bleiben. Gerade hier, so meinen wir, können dennoch, obgleich man vielleicht auf einer elementaren Stufe stehen bleiben muß, interessante Ergebnisse gewonnen werden, wenn man die Querverbindung zur Theorie der angeordneten, insbesondere archimedisch angeordneten Körper herstellt. Dies wollen wir im folgenden aufzeigen.

1. Präliminarien

Ohne es im folgenden stets zu erwähnen, wird die Multiplikation in einem Körper K als kommutativ vorausgesetzt. Ferner werden wir von Körperisomorphismen im Sinne von "Isomorphismus *in* ..." sprechen. (Man beachte, daß somit ein Körperisomorphismus $\varphi : K \rightarrow L$ nicht notwendig ein Isomorphismus *auf* L ist.)

Definition 1. Unter einem *angeordneten Körper* verstehen wir einen Körper K , zusammen mit einer linearen Ordnungsrelation $\leq$, mit den folgenden Bedingungen:

(Mon⁺) Für alle $x, y, z \in K : x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

(Mon') Für alle $x, y \in K : 0 \leq x, 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy$.

In der Literatur ist die Bezeichnungsweise nicht einheitlich; gelegentlich findet man die Begriffe "geordneter Körper" oder auch "linear" bzw. "total geordneter Körper". Eine mit den Verknüpfungen in K gemäß (Mon⁺), (Mon') verträgliche lineare Ordnungsrelation wollen wir im folgenden *Anordnung* nennen. Häufig wird (Mon') als

(1) Für alle $x, y, z \in K$: $x \leq y, 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz$

formuliert, was mit (Mon') gleichwertig ist. Erfahrungsgemäß taucht oft die Frage auf, warum man nicht analog zu (Mon^+) .

(2) Für alle $x, y, z \in K$: $x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$

fordert. Zunächst ist dem entgegenzuhalten, daß (2) Ausdruck eines vermuteten Zusammenhangs (Isomorphie) zwischen der additiven und der multiplikativen Gruppe sein könnte; allerdings, und das sollte stärker betont werden, gibt es keinen Körper, dessen additive und multiplikative Gruppe zueinander isomorph sind [7], geschweige denn ordnungsisomorph. Im Falle der reellen Zahlen, bei denen die Exponentialfunktion einen ordnungstreuen Isomorphismus von $(\mathbb{R}, +)$ nach $(\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}, \cdot)$ liefert, ist (1) (und nicht (2)) die Übersetzung von (Mon^+) . Andererseits folgte aber aus (2) zunächst $0 \leq 1, 0 \leq -1$ oder $-1 \leq 0, 1 \leq 0$; beides führt mit Hilfe von (Mon^+) und der Antisymmetrie der linearen Ordnungsrelation zu $0 = 1$.

Elemente x eines angeordneten Körpers $0 \leq x$ wollen wir als positiv bezeichnen, solche mit $0 < x$ als streng positiv. Summen von Quadraten sind, wie man sich leicht überlegt, stets positiv. Daher gilt in einem angeordneten Körper auch $0 < 1$, so daß die Charakteristik eines solchen Körpers 0 ist. Dies hat zur Folge, daß ein angeordneter Körper K immer einen zu $\mathbb{Q}$ isomorphen Unterkörper (o.B.d.A. also $\mathbb{Q}$ selbst als Unterkörper) enthält. Darauf werden wir im folgenden noch oft zurückkommen.

In vielen Fällen ist es vorteilhaft, eine weitere Kennzeichnung von Anordnungen in Körpern zu benutzen, nämlich die Charakterisierung durch die Positivbereiche. Darunter verstehen wir die Menge P aller positiven Elemente eines angeordneten Körpers.

Lemma 1.

a) Sei P Positivbereich eines angeordneten Körpers K ,
d.h. $P = \{x \in K \mid 0 \leq x\}$

Dann genügt P den folgenden Bedingungen

$$(P1) \quad P + P \subseteq P$$

$$(P2) \quad P \cdot P \subseteq P$$

$$(P3) \quad P \cap (-P) = \{0\}$$

$$(P4) \quad P \cup (-P) = K$$

b) Genügt eine Teilmenge P eines Körpers K den Bedingungen (P1) - (P4), so ist K vermöge

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in P$$

ein angeordneter Körper.

Den Beweis findet der Leser z.B. in [6, S. 241ff]. Ordnungen sind somit schon durch die Mengen der positiven Elemente festgelegt.

Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, sprechen wir von dem Positivbereich eines angeordneten Körpers und meinen damit den durch die (betrachtete) Anordnung festgelegten.

Folgerung 1. Der Körper der reellen bzw. rationalen Zahlen besitzt eine Anordnung.

Beweis. Wie man sich leicht überlegt, folgt für Positivbereiche P, P' mit $P \subseteq P'$ stets $P = P'$. Nun ist jede (im herkömmlichen Sinne) positive reelle Zahl Quadrat und liegt daher in jedem Positivbereich von $\mathbb{R}$. Mithin besitzt $\mathbb{R}$ genau eine Anordnung. Im Falle der rationalen Zahlen sieht man sofort ein, daß die (herkömmlich) positiven Zahlen, daher auch deren multiplikativen Inversen und somit alle Elemente von $\mathbb{Q}^+$ stets positiv sein müssen. Wie oben folgt mit $\mathbb{Q}^+ \subseteq P'$, daß $\mathbb{Q}$ genau eine Anordnung besitzt.

Folgerung 2. Der Körper der komplexen Zahlen ist nicht anordnungsfähig.

Beweis. Als Quadrat ist $1 \cdot 1 = 1$ in einem anordnungsfähigen Körper stets positiv, andererseits gilt $i^2 = -1$ in $\mathbb{C}$, so daß aufgrund von (P 3) $\mathbb{C}$ nicht anordnungsfähig sein kann.

Folgerung 2 bedeutet aber nicht, daß jeder Körper K , der "komplexe Zahlen enthält", d.h. $K \subseteq \mathbb{C}$, $K \not\subseteq \mathbb{R}$ nicht anordnungsfähig ist.

Beispiel 1. $\mathbb{Q}(i \sqrt[4]{2})$ läßt sich vermöge

$$(1) \quad 0 < a + i \sqrt[4]{2} b + \sqrt{2} c + i \sqrt[4]{2} \sqrt{2} d \text{ (in } \mathbb{Q}(i \sqrt[4]{2})) \\ \Leftrightarrow 0 < a + \sqrt[4]{2} b - \sqrt{2} c - \sqrt[4]{2} \sqrt{2} d \text{ (in } \mathbb{R})$$

anordnen. Näheres siehe in Abschnitt 3.

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir an dieser Stelle das klassische Ergebnis von Artin-Schreier [1].

Satz 1. Ein Körper K ist genau dann anordnungsfähig, wenn es keine $a_1, \dots, a_n \in K \setminus \{0\}$ mit $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 0$ gibt.

Körper, die der in Satz 1 erwähnten Bedingung genügen (und somit anordnungsfähig sind), werden in der Literatur als *formal-reell* bezeichnet.

Definition 2. Die Anordnung eines Körpers K heißt *archimedisch* (und K ein *archimedisch angeordneter Körper*), falls für alle Elemente $x, y \neq 0$ des Positivbereichs P von K gilt:

$$(2) \quad x < y \Rightarrow \text{es gibt eine natürliche Zahl } n \text{ mit } y < n \cdot x \\ \text{(dabei bezeichnet } n \cdot x \text{ das } n\text{-fache von } x, \text{ d.h.} \\ x + \dots + x \text{ mit } n \text{ Summanden).}$$

Andernfalls spricht man von einem nichtarchimedisch angeordneten Körper.

Häufig sind zu (2) äquivalente Formulierungen hilfreich (wobei $\mathbb{Q} \subseteq K$ angenommen ist):

- (3) Für jedes $x \in K$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $-n < x < n$.
- (4) Für jedes streng positive Element $x \in K$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $0 < \frac{1}{n} < x$.

Ein oft zitiertes Beispiel eines nichtarchimedisch angeordneten Körpers ist das folgende:

Beispiel 2²⁾ [10]: Man nenne ein Polynom f mit rationalen Koeffizienten positiv, wenn der Koeffizient der höchsten vorkommenden Potenz der Unbestimmten positiv ist. Die Anordnung des Ringes $\mathbb{Q}[X]$ läßt sich auf die Menge $\mathbb{Q}(X)$ der rationalen Funktionen wie folgt fortsetzen: es ist $h = \frac{f}{g}$ positiv, falls für die Leitkoeffizienten f_n, g_m von f bzw. g mit $f = f_n X^n + \dots + f_0$ ($f_n \neq 0$) bzw. $g = g_m X^m + \dots + g_0$ ($g_m \neq 0$) $f_n g_m \geq 0$ gilt. Da $X-c$ streng positiv ist, "übertrifft" das Polynom X sämtliche konstanten Polynome, mithin ist $\mathbb{Q}(x)$ ein nichtarchimedisch angeordneter Körper.

Dieses Beispiel zeigt außerdem, daß ein Körper sowohl nichtarchimedische als auch archimedische Anordnungen zuläßt. Man betrachte die Funktionswerte der rationalen Funktionen an einer transzendenten Stelle und bezeichne f als positiv, wenn es an dieser Stelle einen positiven Wert hat; das ergibt eine *archimedische* Anordnung von $\mathbb{Q}[x]$.

Für archimedische Körper gilt der auf Hölder zurückgehende Satz:

²⁾ Siehe auch: KIRSCH, A.: Die Anordnungseigenschaften der Zahlen als Gegenstand von Axiomatisierungsübungen. Math.Phys.Sem.Ber. 13, 83-105 (1966).

Satz 2 [4]. *Jeder archimedisch angeordnete Körper ist einem Unterkörper der reellen Zahlen ordnungsisomorph.*

In Abschnitt 2 werden wir die tragende Idee des Beweises erläutern.

2. Kennzeichnungssatz

Läßt sich ein Körper K in den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen einbetten, d.h., gibt es einen Isomorphismus φ von K in $\mathbb{R}$, so definiert in K vermöge

$$(5) \quad x \in P \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) \in \mathbb{R}^+$$

φ eine archimedische Anordnung. φ ist bezüglich der in K definierten und der natürlichen Anordnung in $\mathbb{R}$ ordnungstreu. Wesentlich für das folgende ist oft die Beobachtung, daß für jede rationale Zahl r das r -fache des Einselementes von K bei φ das Bild r hat; bei entsprechender Identifizierung der Primkörper ist dann die Einschränkung von φ auf den Primkörper von K die Identität.

Umgekehrt ermöglicht (siehe Satz 2) eine archimedische Anordnung des Körpers K eine ordnungstreue Einbettung nach $\mathbb{R}$. Dies soll nun bewiesen werden.

Lemma 2³. *Jede archimedische Anordnung eines Körpers K induziert einen Isomorphismus $\varphi: K \rightarrow \mathbb{R}$ in die reellen Zahlen, der bzgl. der betrachteten Anordnung von K und der natürlichen Anordnung von $\mathbb{R}$ ordnungstreu ist.*

Beweis. Als Körper der Charakteristik 0 besitzt K (o.B. d.A.) $\mathbb{Q}$ als Unterkörper. Zunächst zeigen wir, daß $\mathbb{Q}$ dicht in K liegt, daß also zwischen (bzgl. der betrachteten)

³ Lemma 2 läßt sich auch schon für archimedisch angeordnete Gruppen formulieren und beweisen (siehe z.B. ANDELFINGER, Lehrerbegleitheft zu Algebra 2, S. 90-93. Herder Verlag, Freiburg).

Anordnung) Elementen $a < b$ aus K mindestens ein $r \in \mathbb{Q}$ mit $a < r < b$ liegt.

Aus der Archimedizität der Anordnung von K folgt, daß für $d \in K$ stets $s, t \in \mathbb{Q}$ mit $0 < s < d < t$ existieren. Es sei nun $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $0 < p < a < b < q$. Dann gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{q-p}{n} < b-a$, so daß mindestens ein Element $p + k \frac{(q-p)}{n}$ im Intervall $]a, b[$ liegt.

Für positive Elemente $x \in K$ setzen wir $\varphi(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$, wodurch wir eine Abbildung des Positivbereiches von K nach $\mathbb{R}^+$ erhalten. Überdies ist $\varphi(x) = \sup\{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$ und nach obigen Überlegungen ist φ injektiv. Man überzeugt sich, daß φ sowohl additions- als auch multiplikations-treu ist, d.h. $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(x+y)$ bzw. $\varphi(xy) = \varphi(x) \varphi(y)$. Setzt man schließlich noch $\varphi(-x) = -\varphi(x)$, so ist φ Isomorphismus von K in $\mathbb{R}$, $\varphi(K)$ also ein Unterkörper von $\mathbb{R}$; da je zwei Elemente aus K durch rationale Zahlen getrennt werden können, ist φ schließlich auch ordnungstreu.

Der im Beweis von Lemma 3 angegebene Isomorphismus φ des archimedisch angeordneten Körpers K nach $\mathbb{R}$ ist der einzig mögliche, der bezüglich der Anordnung in K und der (natürlichen) Anordnung von $\mathbb{R}$ ordnungstreu ist: Ist nämlich $\psi : K \rightarrow \mathbb{R}$ ein ordnungstreuer Isomorphismus und φ wie oben definiert, so haben ψ und φ auf $\mathbb{Q}$, dem Primkörper von K , dieselbe Einschränkung, nämlich die Identität. Aus $\varphi(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid x < r\}$ erhält man $\psi(x) \leq \varphi(x)$. Andererseits liegt $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ dicht, was $\psi(x) = \varphi(x)$ zur Folge hat. Ohne Schwierigkeiten erkennt man, daß verschiedene Anordnungen von K zu verschiedenen Isomorphismen nach $\mathbb{R}$ führen.

Unsere Überlegungen fassen wir zu dem folgenden Satz zusammen:

Satz 3. Zu jedem Positivbereich P jeder archimedischen Anordnung des Körpers K wird der Isomorphismus φ_P

von K in $\mathbb{R}$ durch

$$\varphi_p(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} \mid r - x \in P \setminus \{0\}\} \quad (\text{für alle } x \in K)$$

gebildet; dann ist $P \mapsto \varphi_p$ eine bijektive Abbildung der Mengen der Positivbereiche archimedischer Anordnungen von K in den Körper $\mathbb{R}$. Kurz: Es gibt genausoviel archimedische Anordnungen in K wie Isomorphismen von K nach $\mathbb{R}$.

Bemerkung 1. Jeder Isomorphismus $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Identität.

Bemerkung 2. Mit den obigen Argumenten erhält man, daß der einzige ordnungstreue Automorphismus eines archimedisch angeordneten Körpers die Identität ist (siehe auch [6]).⁴

Automorphismen ψ eines archimedisch angeordneten Körpers erzeugen aus der vorgegebenen Anordnung ($\leq$) vermöge

$$(6) \quad x \leq_\psi y \iff \psi(x) \leq \psi(y)$$

stets weitere Anordnungen $\leq_\psi$ in K . Werden in einem angeordneten Körper alle Anordnungen auf diese Weise induziert?

Eine vorläufige Antwort gibt der leicht zu beweisende Satz 4.

Satz 4. Es sei $(K, \leq)$ ein archimedisch angeordneter Körper. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- a) Sämtliche Isomorphismen von K in $\mathbb{R}$ haben das gleiche Bild.
- b) Sämtliche archimedischen Anordnungen werden durch Automorphismen von K erzeugt, d.h., jede

⁴ BAER nennt in Math. Ann. 188, 165-205 (1970), einen angeordneten Körper *starr*, wenn 1 der einzige ordnungserhaltende Automorphismus von K ist.

solche Anordnung läßt sich mit einem Automorphismus ψ von K als $\leq_\psi$ darstellen.

3. Fortsetzung von Anordnungen

Die bisherigen Ausführungen waren weitgehend selbsttragend und benötigten so gut wie keine Begriffsbildungen aus der Körpertheorie. Auf einem elementaren Niveau sollen nun solche in unsere Überlegungen miteinbezogen werden, einerseits um deren Zweckmäßigkeit auf dem Gebiet der angeordneten Körper aufzuzeigen, andererseits um mit Hilfe von Satz 3 detaillierte Aussagen zu erhalten. Dazu benötigen wir einen reichen Vorrat an Körpern, den wir uns mit Methoden der Körpertheorie verschaffen.

In vielen Fällen kennen wir eine (oder alle) Anordnung(en) eines Grundkörpers k , der oft der Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen sein wird, und wir fragen uns, ob und auf welche Weise wir diese Anordnung auf einen Oberkörper K von k fortsetzen können.

In naheliegender Weise setzen wir (unter "Identifizierung" der Anordnungen mit ihren Positivbereichen):

Definition 3. Es sei k ein angeordneter Körper mit Positivbereich p . Eine Anordnung eines Oberkörpers K von k heißt *Fortsetzung* von p , falls $p \subseteq P$. Wir sprechen dann von einer *ordnungstreuen Erweiterung* $K|k$.

Bemerkung 3. Ist K ein angeordneter Körper mit Positivbereich P , so definiert die Einschränkung $P \cap k$ auf einen Unterkörper k eine Anordnung auf k . Ist p die Fortsetzung der Anordnung p von k , so ist $p = P \cap k$. Die archimedische Eigenschaft der Anordnung von K überträgt sich auf die Einschränkung.

Die Umkehrung der letzten Aussage ist unter einer Zusatzbedingung ebenfalls richtig.

Lemma 3. *Es sei $K|k$ ordnungstreu, algebraische Erweiterung des archimedisch angeordneten Körpers k . Dann ist K notwendigerweise archimedisch angeordnet.*

Zum Beweis siehe [6, S. 244/245].

Wir bemerken, daß der Beweis eigentlich mehr zeigt als in Lemma 3 formuliert wurde: durch algebraische Erweiterungen, die die Anordnung fortzusetzen gestatten, wird der Grundkörper lediglich aufgefüllt, "Lücken" werden "besetzt", mit anderen Worten: der Ordnungstyp der archimedischen Klassen, in Lemma 3 gerade 1, bleibt bei algebraischen Erweiterungen erhalten.

Folgerung 3. Keine (echte) algebraische Erweiterung von $\mathbb{R}$ läßt sich anordnen; d.h., $\mathbb{R}$ ist reell-abgeschlossen.

Eine Anordnung einer algebraischen Erweiterung K ist nach Lemma 3 archimedisch und eine Fortsetzung der natürlichen Anordnung. Wäre K anordnungsfähig, d.h., gäbe es einen Isomorphismus von K in $\mathbb{R}$, so erhielte man durch die natürliche Einbettung von $\mathbb{R}$ in K schließlich einen Isomorphismus von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, also wäre (nach Bemerkung 1) $\mathbb{R} = K$.

Durch Lemma 3 werden algebraische Erweiterungen schließlich als solche Erweiterungen ausgezeichnet, bei denen *jede* Anordnungsfortsetzung archimedisch bleibt, da nach Beispiel 2 transzendente Erweiterungen eines archimedisch angeordneten Körpers stets eine nichtarchimedische Anordnung zulassen.

Wir wollen nun der Frage nachgehen, unter welchen Bedingungen algebraische Körpererweiterungen $K|k$ eines archimedisch angeordneten Körpers ordnungstreu sein können.

Der Vollständigkeit halber erwähnen wir das allgemeine Kriterium:

Satz 5 [8]. Es sei $K|k$ Körpererweiterung eines angeordneten Körpers. K ist genau dann anordnungsfähig, so daß $K|k$ ordnungstreu wird, wenn aus

$$\sum p_i x_i^2 = 0 \text{ mit } x_i \in K \text{ und streng positiven Elementen } p_i \in k \text{ stets folgt: } x_i = 0 \text{ für alle } i.$$

Da wir uns zunächst auf den Fall einfacher Körpererweiterungen beschränken werden, werden wir ein "handlicheres" Kriterium angeben können.

Die Ausgangssituation im folgenden ist stets:

- (7) k ist ein archimedisch angeordneter Körper und $\varphi_p = \varphi$ die natürliche, d.h. die in Satz 3 erklärte Einbettung in $\mathbb{R}$. Es sei Φ die Fortsetzung mit $\Phi(X) = X$ dieses Isomorphismus auf die Polynomringe $k[X]$ bzw. $\mathbb{R}[X]$ und f das Minimalpolynom der einfachen Körpererweiterung, d.h. $K = k[X]/(f)$; $\Phi(f)$ bezeichnet entsprechend das zugehörige Polynom mit reellen Koeffizienten.

Satz 6. Es sei $k, K; \varphi, \Phi$ und f wie oben festgelegt.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

- a) Die Anordnung von k läßt sich nach K fortsetzen.
 b) $\Phi(f)$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

Beweis.

- a) $\Rightarrow$ b) Ist $\psi : K \rightarrow \mathbb{R}$ die natürliche Einbettung, $\varphi|_k = \psi|_k$ und $\psi(X+(f)) = \alpha$, so folgt aus $f(X+(f)) = 0$ sofort $\Phi(f)(\alpha) = 0$.
 b) $\Rightarrow$ a) Mit $\Phi(f)(\alpha) = 0$ für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $K = K[X]/(f) \cong \varphi(k)[X]/\Phi(f) \cong \varphi(k)(\alpha) \subseteq \mathbb{R}$ ergibt sich die Behauptung.

Bemerkung 4. Ist f ein Polynom ungeraden Grades, so besitzt (f) nach dem Zwischenwertsatz mindestens eine reelle Nullstelle; K ist daher anordnungsfähig.

Bemerkung 5. Die Voraussetzung in Satz 6 - k archimedisch angeordnet - ist wesentlich. In [2, S. 37] wird durch ein Beispiel belegt, daß $a) \Rightarrow b)$ nicht für beliebige (nicht-archimedisch) angeordnete Körper gelten kann.

Überdies ist in Satz 6 die in k betrachtete Anordnung für die Fortsetzbarkeit von großer Bedeutung; m.a.W.: *nicht jede* Anordnung von k läßt sich fortsetzen.

Beispiel 3. Es sei $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ mit der natürlichen Anordnung ($\varphi = \text{id}$) vorgelegt. Das Polynom $f = X^2 - \sqrt{2}$ ist über k irreduzibel. Schließlich besitzt $\Phi(f) = f$ eine reelle Nullstelle, so daß $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \xrightarrow{\alpha} \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ in erwünschter Weise angeordnet werden kann.

Nun definiert $\alpha(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ und $\alpha|_{\mathbb{Q}} = \text{id}$ einen Automorphismus α von k , wodurch eine weitere Anordnung $\leq_{\alpha}$ mit

$$x \leq_{\alpha} y \Leftrightarrow \alpha(x) \leq \alpha(y)$$

in k definiert wird. Man beachte $0 \leq_{\alpha} -\sqrt{2}$. Zugleich ist α auch die Einbettung φ nach $\mathbb{R}$, d.h. $\Phi(f) = X^2 + \sqrt{2}$. Da $\Phi(f)$ keine reelle Nullstelle besitzt, läßt sich $\leq_{\alpha}$ nicht nach $K = \mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ fortsetzen.

Allgemein gilt (wie leicht zu beweisen ist):

Lemma 4. Eine Anordnung von k mit dem Positivbereich P läßt sich genau dann auf $k(\alpha)$ mit $\alpha^2 + a = 0$, $a \in k$ fortsetzen, wenn $-a \in P$ gilt.

Ferner sei bemerkt, daß, falls a Quadratsumme ist, die (quadratische) Erweiterung nicht anordnungsfähig ist. In gleicher Weise erkennt man, daß für irreduzible Polynome $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grade 2, die eine (und damit zwei) imaginäre Nullstelle(n) besitzen, $\mathbb{Q}[X]/(f)$ sich niemals anordnen läßt.

Nachdem wir einfache Erweiterungen studiert haben, beschäftigen wir uns noch kurz mit der Anordnungsfähigkeit

des Zerfällungskörpers K eines Polynoms f über dem archimedisch angeordneten Körper k . Ist φ die natürliche Einbettung von k nach $\mathbb{R}$, so ist der Zerfällungskörper K' von $\Phi(f)$ bzgl. $\varphi(k)$ ein Unterkörper von $\mathbb{C}$. Es gibt nun bekanntlich einen Isomorphismus φ' von K auf K' , der φ fortsetzt. Ein ebenfalls φ fortsetzender Isomorphismus ψ von K in $\mathbb{R}$ ergibt dann den Isomorphismus $\psi\varphi'^{-1}$ von K' in $\mathbb{R}$, der $\text{id}_{\varphi(k)}$ fortsetzt und der daher (wegen der Normalität von $K'|\varphi(k)$) ein Automorphismus sein muß: $K' \subseteq \mathbb{R}$, d.h., alle Nullstellen von $\Phi(f)$ sind reell. Umgekehrt folgt daraus, daß φ' ein Isomorphismus von K in $\mathbb{R}$ ist. Damit haben wir:

Satz 7. *Der Zerfällungskörper K eines archimedisch angeordneten Körpers k (mit der natürlichen Einbettung φ) bezüglich des Polynoms f läßt genau dann eine Fortsetzung der Anordnung auf K zu, falls $\Phi(f)$ nur reelle Nullstellen besitzt.*

Bemerkung 6. Der Zerfällungskörper K eines Polynoms $f \in \mathbb{R}[X]$ ist genau dann anordnungsfähig, wenn f (als Polynom aus $\mathbb{C}[X]$) nur reelle Nullstellen besitzt (f also in Linearfaktoren zerfällt und somit $K = \mathbb{R}$ ist).

Beispiel 4. Der Zerfällungskörper K von $f = (X^2 + \sqrt{6})(X^2 + \sqrt{10})(X^2 + \sqrt{15})$ über $k = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$ ist nicht anordnungsfähig. Andernfalls gäbe es einen Positivbereich P in k mit $-\sqrt{6} \in P$ (Lemma 4). O.B.d.A. ist dann $\sqrt{2} \in P$, $-\sqrt{3} \in P$. Um eine Nullstelle von $X^2 + \sqrt{10}$ zu adjungieren und die Anordnung fortsetzen zu können, muß $-\sqrt{10} \in P$, d.h. wegen $\sqrt{2} \in P$ ist $-\sqrt{5} \in P$. Das hätte aber $(-\sqrt{3})(-\sqrt{5}) = \sqrt{15} \in P$ zur Folge, woraus mit Lemma 4 ein Widerspruch folgt.

4. Anzahl von Anordnungen

Schon beim Beweis von Satz 6 wurde deutlich, daß die Anzahl möglicher Fortsetzungen einer Anordnung von k auf die einfache Erweiterung K eng mit der Anzahl von reellen Nullstellen des Minimalpolynoms $\phi(f)$ verknüpft ist. Dies wollen wir als Satz formulieren:

Satz 8. *Es sei k, K, ψ, ϕ und f wie in (7) vereinbart.*

K besitzt genau so viele Fortsetzungen der Anordnungen von k , wie $\phi(f)$ reelle Nullstellen hat.

Beweis. Da f irreduzibel und die Charakteristik von k Null ist, sind sämtliche Nullstellen von $\phi(f)$ einfach. Ist α eine Nullstelle von $\phi(f)$, so wird durch $\sigma(X+(f))=\alpha$, $\sigma|_k = \varphi$ eine Einbettung $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmt. Verschiedene Nullstellen von $\phi(f)$ bestimmen verschiedene Einbettungen nach $\mathbb{R}$ und gehören daher zu verschiedenen archimedischen Anordnungen; schließlich korrespondiert jede Einbettung $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}$ mit einer reellen Nullstelle, nämlich $\sigma(X+(f))$, von $\phi(f)$.

Ist f ein rationales (irreduzibles) Polynom vom Grad 2, so besitzt, wie bereits schon früher erwähnt, $\mathbb{Q}[X]/(f) = K$ entweder zwei oder keine Fortsetzungen der Anordnung von $\mathbb{Q}$, je nachdem ob f reelle oder imaginäre Nullstellen hat.

Diese Situation läßt sich geeignet geometrisch veranschaulichen, was in [9] näher ausgeführt ist: K ist ein zweidimensionaler Vektorraum über $\mathbb{Q}$. Eine Einbettung von K in $\mathbb{R}$ ist eine $\mathbb{Q}$ -lineare Abbildung; daher entsprechen die Anordnungen von K den möglichen Projektionen des $\mathbb{Q}$ -Vektorraums K in die reelle Achse (d.h. den $\mathbb{Q}$ -Vektorraum $\mathbb{R}$) unter Berücksichtigung der definierenden Gleichung $f(\alpha) = 0$.

Ein rationales Polynom f vom Grade 3 besitzt sicher eine reelle Nullstelle α , so daß auch die einfache Erweiterung

$\mathbb{Q}(\alpha)$ mindestens eine Anordnung zuläßt. Ist eine weitere (und damit jede der beiden) Nullstelle(n) nichtreell (also imaginär), so läßt sich K auf genau eine Weise anordnen, d.h., K läßt sich als die natürliche Einbettung $\mathbb{Q}(\alpha)$ in $\mathbb{R}$ interpretieren. Für die Fortsetzung dieser Einbettung auf die Polynomringe $\mathbb{Q}(\alpha)[X]$ bzw. $\mathbb{R}[X]$ gilt daher $\phi(f) = f$. Weil die beiden, nicht in $\mathbb{Q}(\alpha)$ liegenden Nullstellen imaginär sind, läßt sich der Zerfällungskörper f über $\mathbb{Q}$ nicht anordnen.

Hat f genau drei reelle Nullstellen, so treten die folgenden zwei Fälle auf.

1. Die einfache Erweiterung K ist bereits der Zerfällungskörper. Dann besitzt K genau drei Anordnungen.
2. Der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$ ist vom Grade 6, d.h. verschieden von K . Auch hier läßt sich K auf genau drei Weisen anordnen.

Mit dem letztgenannten Fall werden wir uns in Abschnitt 5 nochmals beschäftigen.

Zuvor geben wir noch ein Beispiel einer algebraischen Erweiterung an, in der überabzählbar viele Anordnungen möglich sind.

Beispiel 5. Wir adjungieren zu $\mathbb{Q}$ die Quadratwurzeln von Primzahlen: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots)$. K ist als Unterkörper von $\mathbb{R}$ sicherlich anordnungsfähig. Aus der Menge $\{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \dots\} = \Omega$ wählen wir eine Teilmenge ω und betrachten als Automorphismus φ die Fortsetzung des mittels

$$\sqrt{p} \in \omega \Rightarrow \varphi(\sqrt{p}) = -\sqrt{p}$$

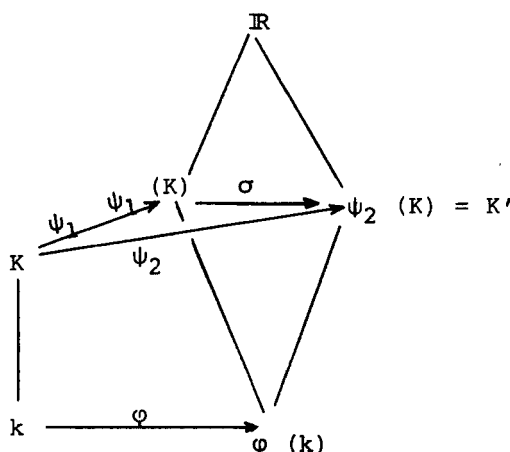
definierten

$$\sqrt{p} \in \omega \Rightarrow \varphi(\sqrt{p}) = \sqrt{p}.$$

Da es überabzählbar viele Teilmengen von Ω gibt, besitzt auch K überabzählbar viele Automorphismen, die jeweils verschiedene Anordnungen in K definieren.

5. Anordnungen, die durch Automorphismen induziert werden

Es sei k ein archimedisch angeordneter Körper und K eine endliche Erweiterung, auf die man die Anordnung von k fortsetzen kann, d.h., es gibt $\psi : K \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi|_k = \varphi$. Jede Anordnung von K , die eine Fortsetzung der Anordnung in k ist, ruft einen Isomorphismus σ von $\psi(K)$ in einen Unterkörper K' von $\mathbb{R}$ hervor, der auf $\varphi(k)$ identisch wirkt.



K' bezeichnet man als zu $\psi(K)$ konjugiert. Nach unseren Überlegungen in Kapitel 4 ist die Anzahl der zu K konjugierten Unterkörper in $\mathbb{R}$ bei einfachen Erweiterungen gleich der Anzahl der reellen Nullstellen von $\Phi(f)$.

Nach Satz 4 werden genau dann sämtliche Anordnungen in K durch Automorphismen aus einer Anordnung erzeugt, wenn sämtliche zu K konjugierten Unterkörper in $\mathbb{R}$ gleich sind.

In Abwandlung der allgemeinen Fragestellung in der Körpertheorie - Unter welchen Bedingungen sind sämtliche zu einem Körper K konjugierten Unterkörper eines Körpers L

gleich? - stellt sich uns daher das Problem: Wann sind sämtliche Isomorphismen von $\psi(K)$ in $\mathbb{R}$ Automorphismen?

Die Antwort für die oben gestellte allgemeine Fragestellung

(8) Für eine endliche Körpererweiterung $K|k$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- 1) $K|k$ ist Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in k[X]$.
- 2) Für jeden Isomorphismus φ von K in einen Oberkörper von K mit
 $\varphi|_k = \text{id}_k$ gilt $\varphi(K) \subseteq K$ (und damit $\varphi(K) = K$);

zeigt auch hier den Weg einer Lösung auf. Dazu ist die folgende Begriffsbildung hilfreich.

Definition 4. Es sei $k \subseteq \mathbb{R}$ und $f \in k[X]$. Ein Erweiterungskörper von k heißt ein *reeller Zerfällungskörper* von f über k , wenn K durch Adjunktion aller reellen Nullstellen von f aus k entsteht.

Satz 9. Es sei $K|k$ eine endliche, ordnungstreue Körpererweiterung des archimedisch angeordneten Körpers k und ψ bzw. φ die Einbettungen von K bzw. k in $\mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- a) $\psi(K)$ ist reeller Zerfällungskörper eines Polynoms $\in \varphi(k)[X]$.
- b) Jede die Anordnung von k fortsetzende Anordnung von K wird durch einen Automorphismus von K bzgl. k erzeugt.

Beweis. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen identifizieren wir K bzw. k mit ihren isomorphen "Kopien" in $\mathbb{R}$, setzen also $\varphi = \text{id}_k$, $\psi = \text{id}_K$ voraus.

- a) $\Rightarrow$ b) Nach Voraussetzung gibt es ein $f \in k[X]$ und $a_1, \dots, a_n \in K$, $g \in k[X]$ ohne reelle Nullstellen mit $f = (X - a_1) \dots (X - a_n)g$. Es sei $K = k(a_1, \dots, a_n)$.

Es ist nun zu zeigen, daß jeder Isomorphismus $\sigma : K \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\sigma|_k = \text{id}_k$ ein Automorphismus von K ist. Da die Körpererweiterung endlich vorausgesetzt ist, genügt es, $\sigma(K) \subseteq K$ nachzuweisen. Offensichtlich ist $f(\sigma(a_i)) = \sigma(f(a_i)) = \sigma(0) = 0$ für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$, und man erhält $\sigma\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq \{a_1, \dots, a_n\}$. Hieraus folgt wegen $K = k(a_1, \dots, a_n)$ unmittelbar $\sigma(K) \subseteq K$.

- b) $\Rightarrow$ a) Als endliche Erweiterung des Körpers k (der Charakteristik Null) ist $K|k$ eine einfache Erweiterung (Satz vom primitiven Element [3, S. 167]). Sei f das Minimalpolynom dieser Erweiterung und $K = k(\alpha)$ mit $f(\alpha) = 0$. Ist β reelle Nullstelle, so definiert $\sigma(\alpha) = \beta$ mit $\sigma|_k = \text{id}_k$ einen Homomorphismus von $k(\alpha)$ in $k(\beta) \subseteq \mathbb{R}$. Bedingung b) besagt nun in Verbindung mit Satz 4, daß sämtliche Homomorphismen von K in $\mathbb{R}$, die φ fortsetzen, dasselbe Bild haben, also $\beta \in K$. Somit ist K reeller Zerfällungskörper von f .

Folgerung 5. Es sei $K|k$ eine endliche, ordnungstreue, normale Körpererweiterung des archimedisch angeordneten Körpers und ψ bzw. φ die Einbettungen von K bzw. k in $\mathbb{R}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- Die Anzahl der die Anordnung von k fortsetzenden Anordnungen von K ist gleich der Ordnung der Galoisgruppe von K über k .
- Jede die Anordnung von k fortsetzende Anordnung von K wird durch einen Automorphismus von K bzgl. k erzeugt.

Die oben unter (8) angegebenen Kriterien charakterisieren bekanntlich normale Körpererweiterungen.

In naheliegender Weise bietet sich in unserem Zusammenhang die folgende Begriffsbildung an:

Definition 5. Eine Körpererweiterung $K|k$ mit $K \subseteq \mathbb{R}$ heißt *reell normal*, falls $K|k$ algebraisch ist und für jedes

irreduzible Polynom $f \in K[X]$, das in K eine reelle Nullstelle hat, alle reellen Nullstellen in K liegen.

Offensichtlich ist K reeller Zerfällungskörper über k , wenn $K|k$ reell normal ist. Im Unterschied zu (8) gibt es allerdings reelle Zerfällungskörper K eines Polynoms $f \in K[X]$, ohne daß $K|k$ reell normale Körpererweiterung ist.

Beispiel 6. Man wähle ein irreduzibles Polynom

$f = X^3 + b_1 X^2 + b_2 X + b_3 \in \mathbb{Q}[X]$, dessen reelle Nullstellen α, β, γ der Bedingung $\alpha > 0, \beta, \gamma < 0$ genügen. Ferner fordern wir:

$[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}] = 6$, d.h., die Galoisgruppe von f hat Ordnung 6. Der reelle Zerfällungskörper K von

$g = X^6 + b_1 X^4 + b_2 X^2 + b_3$ ist $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$. Im Falle $\beta \in \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$ wäre aus Gradgründen $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$. Nun gibt es aber einen Antimorphismus von $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$, der α in β überführt, und da $\beta < 0$ kein Quadrat (in $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$) sein kann, ist auch α nicht Quadrat eines Elements aus $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$. Dies widerspricht $\mathbb{Q}(\alpha, \beta) = \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$, und daher gilt $\beta \notin \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$. Also ist $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom mit der reellen Nullstelle $\alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$, ohne daß die weiteren (reellen) Nullstellen von f in $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$ liegen. Dies belegt die Existenz von reellen Zerfällungskörpern, die keine reell normale Erweiterung sind.

Liest man die Aussage b) in Satz 9 wie folgt:

Alle aus dem Körper K durch Fortsetzung der Anordnung von k hervorgehenden *angeordneten* Körper sind zum *angeordneten* Körper K ordnungsisomorph;

so bietet sich in Analogie zu Satz 9 die folgende Charakterisierung einer reell normalen Körpererweiterung an.

Satz 10. Es sei $K|k$ keine endliche, ordnungstreue Körpererweiterung des archimedisch angeordneten Körpers k und ψ bzw. φ die Einbettungen von K bzw. k in $\mathbb{R}$. Dann sind äquivalent:

- a) $\psi(K) \mid \varphi(k)$ ist reell normal.
- b) Für jeden Zwischenkörper L mit $K \supseteq L \supseteq k$ sind alle aus ihm durch Fortsetzung der Anordnung von k hervorgehenden angeordneten Körper zu angeordneten Unterkörpern des angeordneten Körpers K ordnungs-isomorph.

Beweis. Wie in Beweis von Satz 9 seien K, L, k Unterkörper von $\mathbb{R}$.

- a) $\Rightarrow$ b) Sei $L = k(\alpha)$, f irreduzibles Polynom aus $k[X]$ und $f(\alpha) = 0$. Ist L angeordnet, so gibt es einen Ordnungsmorphismus $\tau : L \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tau|_k = \text{id}_k$.
Offensichtlich ist $f(\tau(\alpha)) = 0$, nach Voraussetzung aber auch $\tau(\alpha) \in K$, was b) beweist.

b) läßt sich wie folgt umschreiben: Ist

$\tau : L \rightarrow \mathbb{R}$ ein Isomorphismus mit $\tau|_k = \text{id}$, so gilt $\tau(L) \subseteq K$.

Sei nun f ein irreduzibles Polynom über $k[X]$, $f(\alpha) = 0$, $\alpha \in K$. Setze $L = k(\alpha)$. Ist β reelle Nullstelle von f , so wird durch $\tau(\alpha) = \beta$ und $\tau|_k = \text{id}$ ein Isomorphismus $\tau : L \rightarrow \mathbb{R}$ bestimmt, der eine Anordnung in L induziert. Daher ist $\tau(\alpha) = \beta \in K$. Also liegen sämtliche reellen Nullstellen von f in K .

Folgerung 6. Ist K ein Zerfällungskörper eines Polynoms $f \in k[X]$, $k \subseteq \mathbb{R}$, so ist $K \cap \mathbb{R} \mid k$ reell normal.

Wie wir bereits im letzten Abschnitt angedeutet haben, wollen wir das Ergebnis aus Satz 9 benutzen, um die Anordnungen in einem Zerfällungskörper eines Polynoms vom Grad 3 über $\mathbb{Q}$ näher zu beleuchten.

Sei also f ein irreduzibles Polynom vom Grade 3, das (notwendigerweise) nur reelle Nullstellen besitzt. Der Zerfällungskörper K von f ist reeller Zerfällungskörper. Nach Satz 9 werden sämtliche Anordnungen durch Automorphismen induziert.

Aus [3] zitieren wir den folgenden Satz:

Satz 11. Sei $f = X^3 + b_1 X^2 + b_2 X + b_3$ ein irreduzibles Polynom dritten Grades aus $\mathbb{Q}[X]$ und

$$d_f = -27 b_3^2 - 4b_2^3 + 18b_1 b_2 b_3 + b_1^2 b_2^2 - 4b_1^3 b_3^3.$$

Dann gilt: Die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von f bzgl. $\mathbb{Q}$ ist isomorph zu

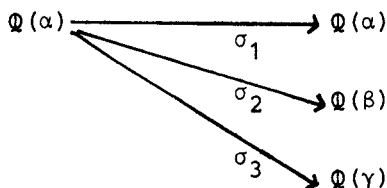
A_3 , falls d_f Quadrat einer rationalen Zahl
 S_3 sonst.

Mit Satz 11 können wir abschließend die Anordnungen des Zerfällungskörpers eines Polynoms $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grade 3 wie folgt beschreiben.

Satz 12. Es sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein Polynom vom Grade 3 und K der Zerfällungskörper von f bzgl. $\mathbb{Q}$.

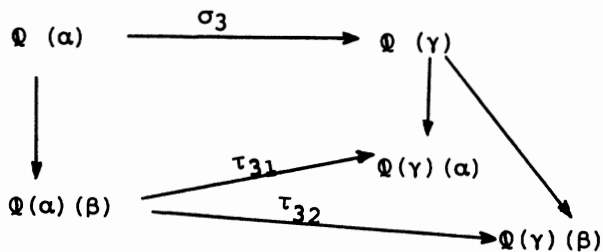
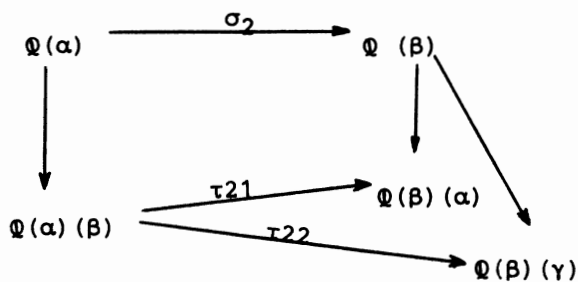
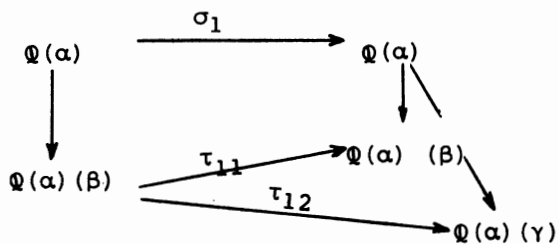
- a) K ist genau dann anordnungsfähig, wenn f drei reelle Nullstellen besitzt.
- b) K besitzt genau
 sechs Anordnungen, falls d_f kein Quadrat in $\mathbb{Q}$ ist.
 drei Anordnungen, falls d_f Quadrat in $\mathbb{Q}$ ist.

Den Fall, daß K sechs Anordnungen besitzt, möchten wir noch kurz detaillierter aufzeigen. Es seien α, β, γ die (verschiedenen) reellen Nullstellen. Die einfache Erweiterung $\mathbb{Q}[X]/(f)$ identifizieren wir o.B.d.A. mit dem Unterkörper $\mathbb{Q}(\alpha)$ von $\mathbb{R}$. Die drei Isomorphismen



korrespondieren zu den drei Anordnungen von $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Bei Adjunktion einer weiteren Nullstelle, o.B.d.A. sei es β , an $\mathbb{Q}(\alpha)$, ist eine Fortsetzung von σ_1 , da die Galoisgruppe zu S_3 isomorph ist, wie folgt möglich.



Beispiel 6. Der Zerfällungskörper von

$$f = x^3 - x + \frac{1}{3}$$

hat genau drei Anordnungen.

a) f ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, da das Polynom

$g = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ keine Nullstellen in $\mathbb{Z}_2$ hat (Reduktionskriterium [3, S. 118]).

b) f hat drei reelle Nullstellen.

$$f\left(\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{9}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3} < 0$$

$$f\left(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{9}\sqrt{3} + \frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3} > 0$$

c) $d_f = \frac{-27}{9} + 4 = -3 + 4 = 1$.

Beispiel 7. Der Zerfällungskörper von

$$f = x^3 - 2x + \frac{1}{2}$$

hat genau sechs Anordnungen.

a) f ist irreduzibel, da das Polynom $g = 2x^3 - 4x + 1 \in \mathbb{Z}_5[X]$ keine Nullstellen in $\mathbb{Z}_5$ hat (Reduktionskriterium).

b) f hat drei reelle Nullstellen.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) < 0, \quad f\left(-\frac{2}{3}\right) > 0$$

c) $d_f = \frac{-27}{4} + 32 = \frac{101}{4}$.

Literatur

- [1] ARTIN, E., SCHREIER, O.: Algebraische Konstruktion reeller Körper. Abh. Math. Sem. Hamburg Univ. 5, 85-99 (1926).
- [2] BOURBAKI, N.: Éléments de mathématique, algèbre, Chap. 6. Hermann, Paris 1964.
- [3] FISCHER, G., SACHER, R.: Einführung in die Algebra. Teubner, Stuttgart 1974.
- [4] FUCHS, L.: Teilweise geordnete algebraische Strukturen. Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen 1966.
- [5] LAUGWITZ, D.: Unlösbarkeit geometrischer Konstruktionsaufgaben - Braucht man dazu moderne Algebra? In: Jahrbuch Überblicke Mathematik 1976, pp. 201-204.

- [6] PICKERT, G.: Einführung in die Höhere Algebra. Vandenhoeck u. Ruprecht, Göttingen 1951.
- [7] SCHÖNBECK, J.: Nicht-isomorphe Gruppen. MNU 29, 480-481 (1976).
- [8] SERRE, J.P.: Extensions de corps ordonnés. C.R. Acad. Sci. Paris 229, 576-577 (1949).
- [9] STEINER, H.G.: Moderne begriffliche Methoden bei der Behandlung der komplexen Zahlen. MU 10 (2), 5-35 (1964).
- [10] VAN DER WAERDEN: Algebra, 1. Teil. Springer, Berlin 1966.

Eingegangen: 23. 12. 1977