ZDM

Zentralblatt für Didaktik der Mathematik

Sonderdruck

KLIEM, U.; KLINK, P.; NATTERER, R.:
Vorkurs Analysis
KLIEM, U., DZEWAS, J. (Hrsg.)
Braunschweig: Westermann, 1978. – 148 S.
(Mathematik-Westermann-Colleg)
ISBN 3-14-111972-4

KLIEM, U.; KLINK, P.:
Grundkurs Analysis
KLIEM, U.; DZEWAS, J. (Hrsg.)
Braunschweig: Westermann, 1979. – 151 S.
(Mathematik-Westermann-Colleg)
ISBN 3-14-111973-2

Günter TÖRNER, Duisburg

0. Vorbemerkungen

Bei der Rezension beschränke ich mich auf die Hefte Vorkurs Analysis (VK) und Grundkurs Analysis (GK) unter Berücksichtigung der methodischen Hinweise im Umfang von 5 Seiten im Lehrerband des Vorkurses, zumal in diesem Heft ausschließlich Aufgabenlösungen angegeben werden.

1. Inhalt

Die Hefte (VK) und (GK) werden von den Verfassern als Lehrgangsvorschläge für eine in den Lehrplänen der Sekundarstufe II (Gymnasium) bundesweit obligatorische Analysis (für Grundkurse) angesehen. Da bekanntlich diese administrativen Lehrplanvorgaben an Umfang und Inhalten erheblich differieren, sind diese Grundkursbände wohl eher als ein Maximalkatalog anzusehen. Beide Hefte enthalten daher auch jeweils einen tabellarischen Hinweis auf einen verkürzten Lehrgang.

Im einzelnen gliedern sich die Hefte wie folgt:

Vorkurs:
1. Die logische Struktur der mathematischen Sprache (21 Seiten)
2. Beweisverfahren (5 Seiten)
3. Reelle Zahlen (15 Seiten)
4. Lineare und quadratische Funktionen (15 Seiten)
5. Verknüpfungen von Funktionen (10 Seiten)
6. Rationale Funktionen (19 Seiten)
7. Spezielle Funktionen – Monotone und beschränkte Funktionen (13 Seiten)
8. Folgen (15 Seiten)
9. Lokale und globale Stetigkeit (18 Seiten)
10. Konstruktion stetiger Funktionen (10 Seiten)

Grundkurs:
1. Stetigkeitsdefinition–Stetigkeitssätze, eine Zusammenstellung (3 Seiten)
2. Differenzierbarkeit (20 Seiten)
3. Globale Eigenschaften stetiger und differenzierbarer Funktionen (17 Seiten)
4. Funktionenuntersuchungen (43 Seiten)
5. Approximation (8 Seiten)
6. Integralrechnung (32 Seiten)
7. Exponential- und Logarithmusfunktion (17 Seiten)

Das *Vorkursheft* beginnt mit zwei grundlagenorientierten Kapiteln: *Logik/Beweisverfahren,* die nach Angaben der Verfasser nach Möglichkeit bedarfsgemäß zu integrieren sind; konkrete Realisierungen werden im Lehrerkommentar nicht aufgezeigt. Im folgenden Kapitel wird die Theorie des der Analysis zugrunde liegenden Zahlbereichs $\mathbb{R}$ zusammengefaßt, wobei sich die Autoren für eine *axiomatische Kennzeichnung* via Vollständigkeitsaxiom entschieden haben, ohne (zu Recht) die geometrisch evidente Existenz eingehender zu problematisieren. Man verzichtet also auf eine Neukonstruktion von $\mathbb{R}$ und arbeitet dafür stärker die Unterschiede zu $\mathbb{Q}$ heraus. Danach erfolgt in systematischer Reihenfolge eine Beschäftigung mit linearen, quadratischen, ganzrationalen, rationalen und schließlich den üblichen speziellen *Funktionen* (sin, cos, abs, int, sgn). Wert wird zumeist darauf gelegt, Funktionen als eigenständige Objekte zu verankern.

Diese Abschnitte über das Arbeiten mit Funktionen münden über drei *Stetigkeitskapitel* (VK § 9, § 10 und GK § 1) in die eigentliche Differential- und Integralrechnung ein, die im *Grundkursheft* abgehandelt wird. Alternativ zu dem Weg über den Stetigkeitsbegriff bietet sich in der Analysis auch die Möglichkeit, Folgengrenzwerte zu thematisieren. Da man diese Alternative didaktisch nicht vertritt (siehe Abschnitt 2), enthält das Vorkursheft im wesentlichen nur der Vollständigkeit halber ein Kapitel: *Folgen* (VK § 8).

Im *Grundkursheft* schließt sich an die Erörterung der *lokalen bzw. globalen Differenzierbarkeit für R W-Funktionen* eine mehr als breite Diskussion der zentralen Sätze an, die auch in Minimallehrgängen von den Verfassern als unentbehrlich angesehen werden. Als Grundbaustein fungiert der anschaulich gerechtfertigte *Intervallsatz,* aus dem sich der Satz vom *globalen Extremum,* der *Zwischenwertsatz,* der *Nullstellensatz,* der *Schnittpunktsatz,* der *Satz von Rolle,* der *Mittelwertsatz* und der *Monotoniesatz* ableiten.

Breiten Raum nehmen auch im Kursheft (GK) traditionsgemäß die *Funktionsuntersuchungen* ein; hier war man bemüht, auch zahlreiche physikalische Anwendungsbeispiele aufzugreifen.

Kapitel 5 ist der *Fehlerrechnung* gewidmet. Bindeglied zur Differentialrechnung ist der *lineare Approximationsaspekt der Tangente,* wodurch sich der Begriff der linearen Näherung (1. Ordnung) eröffnet. Eine Verbindung der quadratischen Näherung mit der Lipschitz-Differenzierbarkeit, d. h. der Steigungsbeschränktheit (VK § 9) der Sekantensteigungsfunktion wird nicht hergestellt.

Kennzeichnend für die *Behandlung der Integralrechnung* ist das Bemühen um einen möglichst frühen Zugang zum *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung,* so daß alsbald das Umkehrproblem sichtbar wird, wodurch bestimmte Integrale über Stammfunktionen ermittelt werden.

Der Grundkurs schließt mit der Behandlung der *Exponential- und Logarithmusfunktion,* wobei man im wesentlichen den *Kleinschen Weg* wählt, das Integral $\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ wird also funktional studiert und die Umkehrfunktion erörtert.

2. Didaktische Konzeption

Wie aus der inhaltlichen Beschreibung der dem Lehrgang zugrundeliegenden Konzeption hervorgeht, ist der *globale Aufbau* weitgehend *fachsystematisch* angelegt: er führt über die Anfangskapitel Logik und Beweisverfahren über eine Behandlung der reellen Zahlen zur Funktionenlehre, die ihrerseits vom Einfachen zum Komplexen voranschreitend aufgebaut ist. Kernstück des Vorkurses ist die Behandlung der Stetigkeit (hier versteht sich das Kursheft als „Lesebuch"); die Differenzierbarkeit selbst wird auf der formalen Ebene auf die Stetigkeit zurückgeführt. Nach einer mehr propädeutischen Behandlung des bestimmten Integrals schließt sich ein frühes Hinführen zum Hauptsatz an; den Abschluß des Grundkurses bildet die formal-exakte Fundierung der log- bzw. exp-Funktion.

‚Zumindest bei der Behandlung der zentralen Sätze läßt sich ein *überzogenes Streben nach inhaltlicher Vollständigkeit* nicht verleugnen. Vielleicht kann man dieser erdrükkenden Angebotsvielfalt etwas abgewinnen, wenn man hier versucht, exemplarisch das lokale Ordnen zu akzentuieren. Eine ähnliche Gefahr des Ausuferns besteht auch in *terminologischer Hinsicht,* man vergleiche die Begriffsanhäufungen in Kapitel 2 (GK): lokaler Hochpunkt, lokales Maximum, lokaler Tiefpunkt, lokales Minimum, Extrempunkt, Extremum, globaler Hochpunkt, globales Maximum, globaler Tiefpunkt, globales Minimum, globaler Extrempunkt, globales Extremum, innerer Extrempunkt, inneres Extremum.

Nicht immer angemessen erscheint mir das *Argumentieren* auf einem ausschließlich *formal-exakten Niveau.* Zwar unterstütze ich ebenfalls das Bemühen, Funktionen als eigenständige Objekte herauszuarbeiten; dennoch muß dabei ein nicht vorteilhafter Nebeneffekt bewältigt werden, nämlich die „neuen" Funktionsbildungen, z.B. f+g, sollten nicht ausschließlich auf der formalen Ebene diskutiert werden. Hier dürfen entscheidende Impulse aus anderen Bereichen, etwa ein Hinweis auf das (physikalische) Superpositionsprinzip, nicht verschwiegen werden.

Im Lehrerkommentar des Vorkurses wird zu Recht auf die Bedeutung der Analysis für die *Anwendungen* hingewiesen. Diese Schuld lösen die Autoren nur bedingt ein, auf jeden Fall aber zu spät. An lediglich *vier Stellen* werden im Vorkursheft etwaige Anwendungsbezüge kurz angedeutet: quadratische Funktionen und Weg-Zeit-Gesetz des freien Falles, Sinusfunktion und Wechselspannungsfunktion, Integerfunktion und Gebührenfunktion, geometrische Folgen und Zinseszinsrechnung. Das Grundkursheft ist im Unterschied dazu erheblich umfassender mit *Beispielen* durchsetzt, die allerdings ausschließlich dem *physikalischen Kontext* entstammen und womöglich im Unterricht aufgrund der viel beklagten, aber real vollzogenen Abkopplung des Physikunterrichts vom Mathematikunterricht unzugänglich bleiben.

Einer der zentralen Diskussionspunkte und damit auch ein aussagekräftiges Kriterium war und ist die *Stellung* bzw. *Behandlung der Stetigkeit* im Kurs. Hier muß man den Autoren eine zwiespältige Position vorwerfen. In den methodischen Hinweisen argumentieren sie: „Die Stetigkeit hat – wie bei einem anderen Lehrgang die Folgenkonvergenz – nur eine *Hilfsfunktion.* Es ist daher kein vernünftiges Ziel, Schüler zur Virtuosität in der Erbringung von Stetigkeits- und Unstetigkeitsbeweisen zu führen ... Sie haben ausschließlich das Ziel, das Verständnis des Schülers für die Stetigkeitsdefinition zu festigen, nicht aber Beweistechniken einzuüben." Gegenüber dem Weg über die Folgenkonvergenz sehen sie u.a. die Vorteile:

„a) Er ist zeitlich kürzer

b) Die zu führenden Beweise sind einfacher."

Beide Argumente werden jedoch durch die allgemeine didaktische Diskussion in Frage gestellt, zu b) haben bekanntlich Otte u.a.: DdM 5 (1977), 16–25 kritisch Stellung genommen. Mehr noch, im Gegensatz zu der behaupteten Hilfsfunktion der Stetigkeit erweist sich die *Stetigkeit als einer der zentralen Begriffe.* Immerhin sind der Stetigkeit und ihrer Präsentation im Buch (VK) allein 28 Seiten gewidmet. Weitere 9 Seiten bleiben in (GK) der Behandlung globaler Eigenschaften stetiger Funktionen vorbehalten (Intervallsatz usw.). Der von Karcher *alternativ* zur Stetigkeit propagierte Begriff der Steigungsbeschränktheit wird in diesen Lehrgang (VK) *zusätzlich integriert* und als Konzept verstanden, diverse Stetigkeitsnachweise zu vereinfachen, denn: Steigungsbeschränkte Funktionen sind global stetig. Ebenfalls auf einer formalen Stufe wird die *Differenzierbarkeit* als *Stetigkeitsaussage* über die Differenzenquotientenfunktion gehandhabt.

Als Einstiegsbeispiel zur Differenzierbarkeit wählen die Autoren das *Tangentenproblem,* wobei man primär darunter die Bestimmung der Tangentensteigung versteht. Dazu dient die Erörterung der Differenzenquotientenfunktion und der Nachweis ihrer stetigen Ergänzbarkeit. Eine mehr grundsätzliche Herausarbeitung eines *inhaltlichen Grundverständnisses,* etwa eine Betonung des Änderungsratenaspektes, wie es sich übrigens nach den Beispielen (GK, S. 28ff) (Geschwindigkeit, Beschleunigung, Stromstärke) anböte, unterbleibt. Auch der *lineare Approximationsaspekt* als alternatives Grundverständnis wird erst im Abschnitt 5 betont.

In Analogie zur Differentialrechnung ist das Einstiegsproblem zur *Integralrechnung* ebenfalls geometrischer Natur: Flächeninhaltsproblem. Gleichzeitig relativiert man aber die Rolle des Flächeninhaltes, indem man in zwei Anwendungsbeispielen auf mögliche inhaltliche Interpretationen (Arbeit, Wegstrecke) hinweist. Eine formale Erarbeitung des bestimmten Integrals unterbleibt, dagegen ermöglicht die frühe funktionale Sicht (Flächeninhaltsfunktion von f zur unteren Grenze von a) eine *baldige Herleitung des Hauptsatzes* als Hauptsatz für Flächeninhaltsfunktionen, wobei die üblichen Integralberechnungen als Umkehraufgaben erscheinen, kurz: das *bestimmte Integral* wird als *Stammfunktionsintegral* verstanden. Ein operatives Grundverständnis der Integralbildung, etwa im Sinne eines verallgemeinerten Aufsummierens, wird nicht angedeutet. Zu bemängeln ist erneut die ausschließlich formale Beweisführung beim Hauptsatz, obgleich auf den Seiten 101/102 (GK) die notwendigen Vorarbeiten für ein inhaltliches Argumentieren geleistet worden sind. Da man schon im Abschnitt: Differenzierbarkeit zu wenig die verschiedenen anwendungsbezogenen Interpretationen des Ableitungsbegriffes betont hat, bleibt der allgemeinere Zugang zu den Volumenberechnungen (via V' = q; V Volumen-, q Querschnittsflächenfunktion) verschlossen und in traditioneller Weise wird statt dessen die Formel $\pi \int f^2(x)dx$ herausgearbeitet.

3. Methodische Einzelaspekte bzw. Anmerkungen

Im Vorlaufenden wurde bereits die Problematik der vielfach den Vorkursen vorangestellten Kapitel Logik bzw. Beweisverfahren angesprochen. Es ist legitim, die Möglichkeiten aufzuzeigen, wie man bei Bedarf die mathematische Umgangssprache im Unterricht noch stärker präzisieren und schließlich auch formalisieren kann. Skeptisch beurteile ich allerdings die Notwendigkeit eines vielfach zu beobachtenden *Symbol-Fetischismus;* ja, es erscheint mir „intellektuell unehrlich", weil er nie konsequent gehandhabt wird und zudem in fachwissenschaftlichen Publikationen nur in beschränktem Umfang praktiziert wird. Die vorliegenden Hefte können sich dieses Trends leider auch nicht voll erwehren. Warum schreibt man nicht (wie etwa auf VK S. 30) anstelle von (VK S. 15)

Für alle $(a, b, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gilt: $a(b+c) = ab+ac$

schlicht:

Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$: $a(b+c) = ab + ac$.

Oder wer schreibt (vgl. VK S. 27):

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \rightarrow_{\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

zumal sich diese Schreibweise, etwa bei von $\mathbb{N}^*$ verschiedenen Nennermengen und im Falle $\frac{d}{c} < \frac{b}{a}$, keineswegs selbst erklärt. Viel aufregender wäre in diesem Zusammenhang (vgl. VK S. 36) ein Hinweis, daß obige Aussage von der Darstellung der rationalen Zahlen $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ abhängig und dennoch unabhängig ist.

Verzichtbar ist meiner Ansicht nach auch der *Gebrauch der Kürzel* $\wedge$ bzw. $\vee$, zumindest in verbalem Kontext. Es ist trivial, den Autoren hier irgendwo Inkonsequenzen vorzuwerfen (vgl. VK S. 42 bzw. VK S. 124 (A)).

An verschiedenen Stellen, bei denen *Existenzaussagen* zur Sprache kommen, hätte man sich gewünscht, daß der Kern der Aussage, nämlich die Existenz, durch wenige erläuternde Bemerkungen noch stärker akzentuiert worden wäre (z. B. bei dem Vollständigkeitsgesetz VK S. 43). Eine solche Intention wird allerdings durch die üblichen Schulbuchaufgaben unterlaufen, wenn man die obere Grenze einer beschränkten Menge berechnen läßt oder die bekannte Zwischenstelle beim Mittelwertsatz ermitteln läßt.

Auf Seite 46 (VK) muß es im Bild 4 D = [1;4] anstatt D = (1;4) heißen.

Methodisch eingehend ausgearbeitet ist der *Zusammenhang zwischen geometrischen Transformationen des Funktionsgraphen* und der *Termdarstellung der Funktion,* hier wird das Miteinander der verschiedenen Darstellungsebenen exemplifiziert (VK S. 49ff bzw. S. 54ff).

Zwar legen die Autoren zumeist Wert darauf, *Funktionen als eigenständige Objekte* herauszuarbeiten; lediglich im Zusammenhang mit der Nullstellenbestimmung der ganzrationalen Funktionen erschiene eine stärkere Akzentuierung der Abspaltung von Linearfaktoren als eine Funktionsproduktaufspaltung in lineare Funktionen wünschenswert.

Den Index $\mathbb{N}$ am Implikationspfeil in Aufgabe 17 (VK S. 106) kann man entsprechend den Verabredungen entbehren.

Gelungen erscheint mir die Aufarbeitung der Eigenschaft „*Sprungstellenfreiheit*“ und die Hinführung zur lokalen Stetigkeit. Dieses Vorgehen, nämlich das sukzessive Ausschließen von „häßlichen“ Beispielen, zeigt einmal mehr, daß es sich bei der Stetigkeit um eine Abgrenzungseigenschaft handelt. Es ist bei einem solchen Unterrichtsgang notwendig, aber auch legitim – und wird im vorliegenden Text auch in einem Fall exemplifiziert – daß vorläufig gewonnene Definitionen evtl. an noch nicht bekannte Situationen angepaßt werden müssen, d. h. zu verfeinern sind.

Die mehr als ausführliche Stetigkeitsdiskussion von $x \to x+a$ auf Seite 15 (GK) steht in *methodischem Kontrast* zu den relativ hohen Anforderungen der Kap. 9 und 10 im (VK).

In Aufgabe 30, S. 42 sollte man den geometrischen Hintergrund des Hilfsfunktionenansatzes ansprechen.

Positiv hervorzuheben ist, daß durchgängig im Buch (GK) in verschiedenen Übungsteilen das *Phänomen Differentialgleichung* (S. 46, 49, 61, 86 usw.) sowie das *Phänomen Funktionalgleichung* (S. 55 usw.) thematisiert ist.

(GK, S. 57, 13. Zeile von oben): Es fehlt das Verknüpfungszeichen.

Die Fortsetzung der Integralfunktion auf Werte $x \leqq a$, d. h. die *sog. Vorzeichenproblematik der Integralrechnung,* wird leider nur formal behandelt, eine inhaltliche Plausibilitätsbetrachtung vermißt man (vgl. GK, S. 109).

Warum sollte man dem Schüler nicht sagen, daß, falls x Integrationsgrenze, auch x als Integrationsvariable prinzipiell zulässig ist, obgleich es aus anderen (verständlichen) Gründen nicht empfohlen wird? (Vgl. GK, S. 109.)

4. Zusammenfassung

Eine abschließende, zusammenfassende Wertung über die vorliegenden Hefte fällt schwer. Die Strenge-Welle in der Schulmathematik führte Ende der 60er und Anfang der 70er Jahre zu einer Generation von Analysis-Konzeptionen (sowohl in Form von Schulbüchern als auch von Lehrplänen (!)), die wie Kopien der Anfänger-Vorlesungen an Universitäten erschienen. Aus dieser Sicht gehören die Bücher zu einer neuen Generation. Gleichwohl sehe ich in dem vorliegenden Text nur einen ersten Zwischenschritt, dem weitere mutige folgen müssen, um der didaktischen Herausforderung der Grundkurse einerseits, und den intellektuellen Anforderungen des Unterrichtsfaches Mathematik andererseits gerecht zu werden.

Unerläßlich erscheint mir für jeden Mathematikunterricht – und nicht nur in diesem Text zu kurz gekommen – das gelegentliche *Heraustreten aus dem Stoff* und ein *Sprechen über Mathematik.* Dazu gehört natürlich auch ein *Reflektieren über verschiedene Lösungsvorschläge* einer Aufgabe, wie es etwa in GK, S. 72ff aufgezeigt wird. Dieses Sprechen über Mathematik, die ja kein Fertigprodukt ist, beinhaltet meiner Ansicht nach aber noch mehr und sollte, nicht nur im Lehrerkommentar, auch im Schulbuch erfolgen. Ist es nicht möglich, in wenigen Sätzen auf die grundsätzliche *Problematik der Nullstellenbestimmungen* für Polynomfunktionen hinzuweisen? (Fazit aus der Galoistheorie des 19. Jahrhunderts: Es kann im allgemeinen ($n \geqq 5$) keine Formeln geben!) (vgl. die mißverständliche Beschreibung auf S. 78 VK). Warum funktioniert denn das im Unterricht gepriesene *Rateverfahren für Polynome* in Schulbuchaufgaben in vielen Fällen (vgl. GK S. 50)? Weil es dem Schüler zuliebe (?) Schulbuchaufgaben sind! Es böte sich ferner die Möglichkeit, beim Beweisverfahren der vollständigen Induktion über Mathematik zu sprechen. Hierzu liegen in der didaktischen Literatur zahlreiche Anregungen vor. Muß eine solche Behandlung ausschließlich auf der formal-exakten Ebene erfolgen?

TISCHEL, Gerhard:

Grundkurs Analysis

SCHRÖDER, H.; UCHTMANN, H. (Hrsg.)
Frankfurt am Main: Diesterweg, 1974. – 237 S.
(Einführung in die Mathematik für allgemeinbildende Schulen) ISBN 3-425-07116-5

Karl-Heinz HÜRTEN, Köln

Die folgende Kritik stellt einige Thesen über Analysis-Bücher für den Grundkurs in Schlagzeilen auf und demonstriert die Aussagen am obigen Werk.

1. Bücher für Grundkurse dürfen keine Extrakte aus den Hauptwerken für Leistungskurse sein!

Daß dies im vorliegenden Fall ein Musterbeispiel für Verdünnung ist, belegt die Inhaltsübersicht:

Leistungskurs-Band	Grundkurs-Band
Reelle Zahlen (sehr ausführlich)	Grundlagen (Reelle Zahlen verdünnt und Funktionen)
Induktion	fehlt
Funktionen Allgemeine Darstellung Reelle Funktionen	Reelle Funktionen (stark verdünnt)

Folgen	fehlt
Stetige Funktionen	(wenig gekürzt)
Stetige Fortsetzung	(nur sehr dünn bei Diffe-
Grenzwert bei Funktionen	renzierbarkeit)
Einführung in die Diffe-rentialrechnung	Differenzierbare Funktionen (fast gleich)
Anwendung der Differentialrechnung (in beiden Bänden knapp)	
Differentiation der trigo-nometrischen Funktionen u. ihrer Umkehrfunktionen	Die Funktionen SIN und COS
Näherungsverfahren	fehlt
Integralrechnung	Integrierbare Funktionen (verdünnt)
Anwendung der Integralrechnung	
Integrationsmethoden	
Logarithmusfunktion und Exponentialfunktion	

Daß in einem Grundkurswerk weniger dargelegt werden soll als in einem Hauptwerk, ist selbstverständlich. Da man aber nur verdünnt, ist das Grundkurswerk schwerer lesbar als das Werk für Schüler, die größere mathematische Begabung und stärkeres Interesse einbringen als die Grundkursler. Im vorliegenden Fall ist dies besonders deutlich bei der Behandlung der Umkehrfunktion auf S. 132f.

2. Lehrbücher sollen deutlich ihre Ziele nennen!
Im vorliegenden Werk werden dem Schüler keine Ziele deutlich, außer: Er muß neue Definitionen und Lehrsätze lernen, er muß nach neuen Formeln rechnen. Die Schüler werden von dem artifiziellen Aufbau, dem ausgeklügelten Begriffsapparat und dem versponnenen Netzwerk der Beweise völlig abgeschreckt. Der Mathematikdidaktiker schmeckt einige rein fachdidaktische Feinheiten. Für ihn ist aber das Buch nicht geschrieben.

Es wäre nicht schwierig, durch einigen Lesestoff dem Schüler Lernziele dieses Unterrichtes vorzustellen. Daß dies nicht geschieht, ist ein prinzipieller Mangel von Mathematikschulbüchern. Mögliche Ursachen dafür könnten sein: Die Lehrbuchverfasser wollen viele Aspekte offenlassen; sie wollen dem individuellen Stil des einzelnen Lehrers Freiraum geben. Zum anderen müssen die Verfasser die Richtlinien aller Bundesländer beachten. Da man nicht alle Lernziele artikulieren kann, muß man auswählen. Damit aber wird man nicht mehr allen Vorstellungen der Kultusminister gerecht.

Im Lehrerheft sind einige Lernziele angesprochen. Allerdings sind die meisten Hinweise Rechtfertigungen des mathematischen Vorgehens und Vorfeldverteidigungen gegen Vorwürfe der Unexaktheit.

Lehrbuchverfasser sollen nicht nur zu Anfang die Ziele aufzeigen – die hier vorliegende Einleitung „Probleme der Analysis" ist ein kleines Feigenblatt –, sondern auch zwischendurch und zum Schluß den Lernenden in Rückblick und Ausblick einen Überblick über ihr Lernen geben.

3. Mathematikbücher sollen mathematische Ideen vermitteln!
Das vorliegende Werk – wie fast alle anderen Analysisbücher für allgemeinbildende Schulen – läßt keine der großen mathematischen Ideen erkennbar werden. Was wäre im Rahmen dieses Werkes nicht alles möglich!

a) Im Teil „Grundlagen" bzw. „Reelle Zahlen" ist die Chance vertan zu zeigen, was axiomatische Methode leistet, was implizite Definition im Sinne D. Hilberts ist.

b) Der Leser spürt nichts davon, daß Leibniz stolz darauf war, die infinitesimale Rechentechnik im Differentialkalkül entdeckt zu haben, die aufwendige Verfahren (z.B. Extremwertberechnung) durch eine neue Arithmetik ablöste. Welcher Leser wundert sich darüber, daß die Umkehrung des Differenzierens komplizierteste Flächenberechnung ermöglicht? (Man lese die faden Bemerkungen auf Seite 176!) Unsere Mathematikbücher können den Lehrstoff nicht so arrangieren, daß das Staunen geweckt wird.

c) Bei den Anwendungen erfährt der Schüler nichts von der genialen Idee des infinitesimalen Aufaddierens. Ihm werden die Vorstellungen Leibniz' noch nicht einmal angedeutet, daß in jedem noch so kleinen Stück einer Kurve ihr vollständiges Gesetz enthalten ist, eine Vorstellung, die zur Theorie der regulären Funktionen führte. Man sagt dem Schüler nichts davon, daß man aus der Kenntnis grundlegender Differentialgleichungen deterministisch das Weltgeschehen vorhersagen zu können sich anmaßte, weil man das Infinitesimale als vollkommenes Abbild des Alls betrachtete. In ein Mathematikbuch für *allgemeinbildende Schulen* dürfen die Verfasser ruhig etwas aus Philosophie und Geistesgeschichte einbringen.

d) Warum bringt man nichts über den Prozeß der Präzisierung, der im letzten Jahrhundert die Mystik des Unendlich-Kleinen aus der Analysis verbannte? Der Abschnitt über Stetigkeit könnte so zu einem spannenden Bericht über das Ringen werden, wie man die Vorstellung einer ‚vernünftigen Funktion' durch einen wohldefinierten Begriff erfassen kann. Wenn auch (S. 70f) die Stetigkeitsdefinition (über den Umgebungsbegriff) anschaulich gut vorbereitet wird, so ist sie doch nicht motiviert; denn die Anschauung bedarf keiner Präzisierung. Erst wenn man die Grenzen der Anschauung erkannt hat, ist man bereit, begriffliche Kleinarbeit zu leisten. Hat man in diesem Zustand eine Definition gefunden, so wird man testen, ob der Begriff als Werkzeug das leistet, was uns die anschauliche Vorstellung von einer ‚vernünftigen Funktion' suggeriert hat. Untersuchungen über Zwischenwerte und Beschränktheit werden motiviert, mehr noch, sie werden herausgefordert. Man kann es fast dramatisieren, wenn man die Frage stellt, ob man die Existenz eines Maximums über einem abgeschlossenen Intervall aus dem Begriff herholen kann oder ob man ein Axiom zusätzlich nötig hat. Was macht das Buch, wie so viele andere? Es beweist zunächst einmal, daß die konstante Funktion mit dem Wert 1 an jeder Stelle a stetig ist. Dies muß jedem intelligenten Schüler als Anfänger wie potenzierte Schwachheit vorkommen. Fühlt sich derselbe Schüler nicht zum Narren gehalten, wenn man über die Indikatorfunktion schreibt: „Der Graph von f zeigt, daß an der Stelle 0 ein ‚Sprung' mit der ‚Sprunghöhe' 1 vorliegt. Vermutlich ist f an dieser Stelle nicht stetig." Und nun folgt der Beweis! (Die Vorteile eines Motorpfluges kann man nicht im Vorgarten demonstrieren!)

Die gleichen Anmerkungen kann man zur Einführung der differenzierbaren Funktion machen. Immerhin wird hier schnell (nach 8 Seiten) auf S. 106 „Die Tangentenfunktion als lokale Annäherung" betrachtet.

e) Warum wird beim Aufbau der Arithmetik stetiger bzw. differenzierbarer Funktionen weder ein Seitenblick auf Strukturbegriffe (Vektorraum, Gruppe, Ring) gewagt noch etwas dazu gesagt, daß ein Kalkül aufgebaut wird? (Den Seitenblick kann man auch wagen, wenn die Namen nicht zur Verfügung stehen; man braucht ja nur die Gesetze der Zahlenarithmetik mit denen der Funktionsarithmetik zu vergleichen!) Kommutativer Ring wird verschämt zweimal in Aufgaben erwähnt.

f) Im vorliegenden Werk gelangt man kaum zu einer vernünftigen Anwendung der Differentialrechnung, weil man den Lernenden zunächst mal auf den Pfad der Exaktheit schickt und ihn mühselig alles Gestrüpp wegräumen läßt. Ich