Bemerkungen zur Geschichte der Linearen Algebra

Benno Artmann und Günter Törner

Vorbemerkungen

Im Gegensatz zur Geschichte der Analysis ist die Entstehung der Linearen Algebra bisher relativ wenig untersucht worden. Will man sich informieren, so ist man auf Gesamtdarstellungen der Geschichte der Mathematik und einige Zeitschriftenartikel angewiesen. Sicher ist der Rückgriff auf die Originalliteratur, etwa des 19. Jahrhunderts, nicht allzu schwierig und auch die beste Arbeitsmethode, aber für einen kurzen Überblick ist dies Verfahren doch zu langwierig. Wir haben uns deshalb trotz einiger Bedenken entschlossen, hier eine Skizze der Entwicklung der Linearen Algebra vorzulegen, wie wir sie in Vorlesungen über Didaktik der Linearen Algebra für Lehramtsstudenten als mehr globale Hintergrundsinformation eingeflochten haben. Die meisten unserer Angaben sind der Sekundärliteratur entnommen.

Der Übersichtlichkeit halber haben wir sechs Themenkreise isoliert, welche uns für die Entwicklung der Linearen Algebra wesentlich scheinen. Tatsächlich waren diese Gedanken natürlich oft stark miteinander verflochten.
Es sind die folgenden:

1. Lineare Gleichungssysteme
2. Kegelschnitte, quadratische Formen und analytische Geometrie
3. Vektorbegriff und vektorielle Kalküle
4. Lineare Substitutionen und Matrizen
5. Funktionalanalysis
6. Strukturtheorie

Am Schluß dieser Arbeit findet der Leser einige allgemeine Hinweise auf die Literatur.

1 Lineare Gleichungssysteme

Schon um 1700 v. Chr. wurden von den Babyloniern Gleichungssysteme gelöst, es handelt sich meist um zwei Unbekannte, die z. B. in der Form

$$\begin{aligned} xy + x - y &= a \\ x + y &= b \end{aligned}$$

oder einfacher linear

$$\begin{aligned} ax - by &= c \\ x + y &= d \end{aligned}$$

gegeben sind. (Vgl. etwa *v. d. Waerden* [21].)
Beachtlich ist auch der Kenntnisstand im alten China. Überliefert ist uns ein Lehrbuch „Mathematik in neun Büchern", das wahrscheinlich schon um 180 v. Chr. durch den Mathematiker *Shang Cang* verfaßt wurde und uns in der Bearbeitung von *Liu Hui* aus dem Jahre 263 n. Chr. vorliegt.
Das achte dieser Bücher befaßt sich mit Systemen linearer Gleichungen und entwickelt dabei ein *allgemeines Lösungsverfahren* „Fangcheng", in dem wir ohne Mühe den Gaußschen Algorithmus erkennen, das sogar auf 5×5-Systeme angewandt wurde. (Angaben nach *Juschkewitsch* [12].) Ein Beispiel ist die folgende Aufgabe: Wieviel Hähne, Hennen und Küken kann man für 100 Münzen kaufen, wenn man insgesamt 100 Vögel haben will und ein Hahn 5 Münzen, eine Henne 4 Münzen und 4 Küken eine Münze kosten? – Aufgaben dieser Art waren weit verbreitet. Sie finden sich auch in Indien und Ägypten, in Westeuropa zuerst bei Alciun im 8. Jahrhundert. Das chinesische Verfahren scheint allerdings im Westen nicht bekannt geworden zu sein. Die für uns wichtige Tradition verläuft wohl von Babylonien über Griechenland (*Diophant*) bzw. die Araber und findet ihren ersten (erhalten gebliebenen) geschlossenen Ausdruck bei *Leonardo Fibonacci* von Pisa (um 1170–1220). Leonardo hat wesentlich zur Verbreitung der arabischen Ziffernschreibweise beigetragen. In seinem Buch findet man eine der oben zitierten analoge Aufgabe über den Einkauf von Vögeln auf dem Markt und auch die folgende, welche wir nach *Gericke* [10] zitieren. Diese Aufgabe ist in zweierlei Hinsicht interessant: Einmal weil hier eine negative Lösung auftritt, zum anderen weil die Aufgabenstellung offenbar nach einem Muster erfolgt, welches schon bei *Diophant* vorkommt: Es handelt sich um vier Personen, die gewisse Geldbeträge x_1, x_2, x_3, x_4 besitzen und eine Börse mit einem Betrag b finden. Dann werden in Worten die folgenden Gleichungen angegeben:

$$\begin{aligned} x_1 + b &= 2(x_2 + x_3) \\ x_2 + b &= 3(x_3 + x_4) \\ x_3 + b &= 4(x_4 + x_1) \\ x_4 + b &= 5(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Der Text fährt fort: Ich werde zeigen, daß diese Aufgabe unlösbar ist, wenn nicht zugestanden wird, daß der erste Partner Schulden hat. (Selbstverständlich kommen als Lösungen nur ganze Zahlen in Betracht.)
Zum Vergleich noch eine Aufgabe von *Diophant* (Alexandrien, um 250 n. Chr.)

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{3}(z + y) &= 25 \\ y + \frac{1}{4}(x + z) &= 25 \\ z + \frac{1}{5}(x + y) &= 25 \end{aligned}$$

Bei *Leonardo* findet man noch wesentlich kompliziertere Aufgaben dieses Typs, für die er offenbar *Lösungsformeln* hatte. Vermutlich wurde dadurch die Forschung in die Richtung der Suche nach Lösungsformeln

$$x_i = f(a_{ij}, b_k)$$

für das System $A\vec{x} = \vec{b}$ gelenkt. Man hatte ja zu Beginn der Neuzeit auch solche Formeln für die Nullstellen von Polynomen dritten und vierten Grades gefunden. Diese Suche führte in der Mitte des 18. Jahrhunderts zum Erfolg, *Mac Laurin, Cramer* und *Bezout* haben Anteil an der „*Cramer*schen Regel"

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$$

die natürlich den Determinantenbegriff voraussetzt. Die Schreibweise mit Indizies kann man schon bei Leibniz antreffen, aber bei der ersten zusammenfassenden Darstellung über Determinanten von Vandermonde 1770 fehlen die uns vertrauten Bezeichnungen noch. Diese gehen wohl auf Arbeiten von *Cauchy* (1815 bzw. 1830) zurück, in denen z.B. der Determinantenmultiplikationssatz und der Entwicklungssatz von *Laplace* bewiesen sind. Bei *Cauchy* ist auch die Interpretation der Determinante als orientiertes Volumen eines Parallelflachs vorhanden. Die Determinanten dringen nun auch in die Analysis ein, insbesondere als Funktionaldeterminanten (Jacobische Determinante) bei der Auswertung von Mehrfachintegralen. *Jacobi* stellte heraus, daß die Funktionaldeterminante als angemessene Verallgemeinerung der gewöhnlichen Ableitung in den Bereich der Funktionen mehrerer Variabler anzusehen ist. Während man bis etwa 1850 Gleichungssysteme mit singulären Koeffizientenmatrizen kaum beachtet hat („Es handelt sich um schlecht gestellte Aufgaben, über die man wenig sagen kann" – so etwa *Jacobi*), kann schon 1861 (*Smith*) bzw. 1867 (*Dogson* alias L. *Carroll*) die Theorie als im wesentlichen voll entwickelt gelten.

2 Kegelschnitte, quadratische Formen und analytische Geometrie

Diese Thematik ist wohl die wichtigste in der Entwicklung der Linearen Algebra, insbesondere wegen der damit verbundenen Hauptachsentransformationen. Die Kegelschnitte sind aus der Antike bekannt, ihre Geschichte ist eingehend beschrieben bei *Fladt* [9]. Durch *Keplers* Entdeckung, daß die Planetenbahnen Ellipsen sind, erhielt ihr Studium neue Impulse. Um 1640 wurde von *Fermat* und *Descartes* die Koordinatenmethode eingeführt und sogleich entdeckt: Durch eine lineare Gleichung wird in der Ebene eine Gerade beschrieben, und durch eine quadratische Gleichung ein Kegelschnitt. Mit dieser Kennzeichnung der ebenen Schnitte eines Kegels durch den Grad der zugehörigen Gleichung steht ganz am Anfang der analytischen Geometrie eine zentrale Einsicht, die für die Motivierung der weiteren Arbeit sicher nicht zu unterschätzen ist. Hier findet sich auch schon das Studium von Gleichungen $F(x, y) = 0$ höheren Grades, mit dem die algebraische Geometrie ihren Anfang nimmt. Entsprechende Untersuchungen von Lösungsmengen im dreidimensionalen Raum zeigen, daß jede zugefügte Gleichung den „Freiheitsgrad" um 1 reduziert, wodurch zum ersten Mal der Dimensionsbegriff mit der Algebra verflochten wird, ohne jedoch weitere Aufmerksamkeit zu finden.

Zugleich mit der Koordinatenmethode entstand das Problem der „Koordinatentransformation". Man wollte etwa für einen Kegelschnitt das Koordinatensystem so wählen, daß die zugehörige Gleichung eine möglichst einfache Form annimmt. Dies ist gerade dann der Fall, wenn die Koordinatenachsen mit den aus der synthetischen Geometrie bekannten Hauptachsen des Kegelschnitts übereinstimmen, deshalb „Hauptachsentransformation". Hierzu verwendet man „lineare Substitutionen", bei deren Verwendung Euler um 1740 auch den Begriff „affin" einführt. Die entsprechenden Fragen für Flächen zweiten Grades fanden ihren Abschluß etwa um 1800–1830 an der Ecole Polytechnique in Paris mit der Lösung des Eigenwertproblems für symmetrische 3×3-Matrizen und dem intensiven Studium der den Matrizen zugehörigen Normalformen von quadratischen Formen. *Cauchy* hat 1829 über die Dimensionsgrenze 3 hinausgegriffen mit dem Satz, daß eine reelle symmetrische $n \times n$-Matrix reelle Eigenwerte hat und die zugehörige quadratische Form auf Hauptachsen transformiert werden kann.
Eine zweite Forschungsrichtung, die auf Eigenwertprobleme führt, war das Studium linearer Differentialgleichungen im 18. Jahrhundert, insbesondere durch *Euler* und *Lagrange.* (Hierzu vgl. *Hawkins* [11].) Die Berücksichtigung der wechselseitigen Anziehung der Planeten führten auf die „Säkulargleichung" für die Planetenbahnen. Die Frage nach der Stabilität der Bahnen läuft wieder hinaus auf das Eigenwertproblem für eine symmetrische Matrix. Die Verbindung zur Geometrie war aber noch nicht erkannt und es fehlte auch noch ein handlicher Kalkül zur Bestimmung des charakteristischen Polynoms, dessen grundsätzliche Bedeutung *Lagrange* und *Laplace* um 1770 erkannten. Obgleich – aus heutiger Sicht und in moderner Sprechweise – die Ergebnisse von *Laplace*, daß nämlich die Symmetriebedingungen für die Koeffizienten in der Säkulargleichung Reellwertigkeit der Nullstellen implizieren, in Verbindung mit *Lagranges* Hauptachsentheorem für symmetrische 3×3-Matrizen einen gemeinsamen Kern vermuten ließen, wurde die Synthese erste nach *Cauchys* Arbeit von 1829 durch *Sturm, Weierstraß* und andere vollzogen.

Schließlich gehört in dieses Kapitel noch das Studium der quadratischen Formen in der Zahlentheorie. Die quadratische Form $q\colon (x, y) \to ax^2 + 2\,bxy + cy^2$ entspricht dem Kegelschnitt, nur wird bei der Beschränkung auf ganzzahlige x, y die Menge $q(x, y) = 1$ (Kegelschnitt) besser ersetzt durch die gesamte Wertemenge von q, d. h. durch die Menge der „durch q dargestellten" Zahlen. In heutiger Schreibweise erhält man q durch

$$q(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

wodurch verständlich wird, daß in der Äquivalenz- und Kompositionstheorie der quadratischen Formen die Matrizenmultiplikation implizit vorhanden ist. Diese von *Lag-*

range begründete Theorie macht den wesentlichen Teil von *Gaußens* „Disquisitiones Arithmeticae“ aus, in denen viele wichtige Begriffe aus Algebra und Zahlentheorie (wie z. B. der Gruppenbegriff) angelegt sind.

3 Der Vektorbegriff

Die Vektoren wurden 1843/44 durch *Hamilton* und *Graßmann* in die Mathematik eingeführt. *Hamilton* fand 1843 seine Quaternionenmultiplikation bei der Suche nach geeigneten Multiplikationsformeln für die Punkte des dreidimensionalen Raums, die die Verknüpfung der komplexen Zahlen sinngemäß verallgemeinern sollten. Wir haben – mit unseren heutigen, damals noch nicht vorhandenen Hilfsmitteln – die Möglichkeit der knappen Mitteilung. Die komplexen Zahlen $x + iy$ werden isomorph dargestellt durch die Matrizen $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, analog erhält man mit $z = x + iy$ und $w = u + iv$ sowie $\bar{z} = x - iy$ die Matrixdarstellung der Quaternionen:

$$\begin{pmatrix} z, & -\bar{w} \\ w, & \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y & -u & -v \\ y & x & v & u \\ u & v & x & y \\ v & u & -y & x \end{pmatrix} = x + iy + ju + kv$$

Addition und Multiplikation der Quaternionen sind nichts anderes als die entsprechenden Matrizenverknüpfungen. Die Quaternion $x + iy + ju + kv$ wird nun zerlegt in „Skalarteil“ x und „Vektorteil“ $\vec{q} = iy + ju + kv$, den man als einen Punkt des $\mathbb{R}^3$ auffaßte. (Der $\mathbb{R}^4$ stand noch nicht zur Debatte.) Bei der Multiplikation zweier Vektorteile hat das Produkt einen Skalarteil, das sog. Skalarprodukt der beiden Vektoren, und einen Vektorteil, das ist das vektorielle (oder Kreuz-) Produkt der Vektoren. Damit sind also diese noch heute so bezeichneten Operationen mit erfunden.

Von *Graßmann* erschien 1844 die in schwer verständlicher Form geschriebene „Ausdehnungslehre“, in der der $\mathbb{R}^n$, unabhängig von *Hamilton* auch Skalar- und Vektorprodukt, der Begriff „linear unabhängig“, die Dimensionsformel

$$\dim(S + T) + \dim(S \cap T) = \dim S + \dim T$$

die äußere (sog. *Graßmann*-) Algebra und vieles andere enthalten sind. *Graßmanns* Werk wurde nur zögernd aufgenommen, während *Hamiltons* Gedanken durch die auch von ihm geschaffenen Verbindungen zur Physik schnell Anerkennung fanden. *Maxwell* benutzt 1873 in seinem „Treatise on Electricity and Magnetism“ systematisch Vektoren und die Vektoranalysis mit Divergenz, Rotation, Gradient usw. Um 1900 sind diese Dinge allgemein akzeptiert, wobei die theoretische Physik die Schrittmacherdienste geleistet hatte.

Von 1850 an setzte sich die Vorstellung höherdimensionaler Räume langsam durch. Mehr in die analytische Geometrie gehören die von dem Schweizer *Schläfli* um 1850 betrachteten höherdimensionalen Polytope, insbesondere die Verallgemeinerungen der regelmäßigen Polyeder in den $\mathbb{R}^4$. Auch *Schläfli* war wohl, wie *Graßmann,* nicht leicht zu lesen und mit seinen Gedanken den Zeitgenossen voraus. In der Zeit von 1880 bis 1900 wurden seine Ergebnisse von mehreren untereinander unabhängigen Autoren wiedergefunden.

4 Lineare Substitutionen und Matrizen

Bereits in den beiden ersten Abschnitten hatten wir deutlich gemacht, daß sowohl das Arbeiten mit Linearen Substitutionen, z. B. in der Geometrie oder in der Zahlentheorie, als auch der Determinantenkalkül in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts vielen Mathematikern vertraut waren. *Eisenstein* hat in Arbeiten aus den Jahren 1844 bzw. 1852 in einer Weiterentwicklung der *Gauß*schen Theorie quadratischer Formen lineare Substitutionen als selbständige Entitäten behandelt. Insofern markiert *Cayleys* kurze Note [4] aus dem Jahr 1855 höchstens in Bezug auf Form und Schreibweise, nicht aber in inhaltlicher Sicht den Anfang der Matrizenrechnung. *M. Kline* beschreibt in [14, S. 804] die Situation um 1850 mit den Worten: „One could say that the subject of matrices was well developed before it was created."
Cayley motiviert in seiner Arbeit die „neue" Begriffsbildung als vorteilhafte stenographische Notation im Zusammenhang mit der Behandlung von linearen Gleichungssystemen. Er schreibt $A\vec{x} = \vec{b}$ und benutzt das durch diese Darstellung nahegelegte Lösungsschema $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$, wobei er bezeichnenderweise die Existenz von A^{-1} stillschweigend voraussetzt. Bezüglich der Bildung von A^{-1} verweist er auf die wohlbekannte Theorie der Determinanten.

Unabhängig von der Originalität der *Cayley*schen Begriffsbildung ist die explizite Einführung des Matrixbegriffes ein hervorragender Beleg dafür, wie die angepaßte Wahl einer neuen Schreibweise entscheidend zur Entwicklung einer Theorie beitragen kann. Bereits 1858 lag das *Cayley-Hamilton*-Theorem, daß nämlich eine Matrix ihrer eigenen charakteristischen Gleichung genügt, vor. Um die gleiche Zeit etwa beweist *Hermite* den Spektralsatz (d. h. die Möglichkeit der Hauptachsentransformation) für „hermetische" Matrizen. Der Rang einer Matrix wird jedoch noch lange Zeit mit Hilfe von Unterdeterminanten definiert. Typisch ist auch eine Bemerkung bei Felix *Klein* [13, S. 190], die sinngemäß besagt: man multipliziert Matrizen wie Determinanten. Offenbar waren den Hörern *Kleins* noch in dieser während des ersten Weltkrieges gehaltenen Vorlesung die Determinanten weit vertrauter als die Matrizen.

In der Geometrie wird durch *Cayley* und *Klein* (etwa 1860–70) die sog. projektive Maßbestimmung mittels Bilinearformen bzw. „verallgemeinerten Skalarprodukten" eingeführt. *Camille Jordan* veröffentlicht 1870 das erste Buch über Matrizengruppen, die später sog. klassischen Gruppen. Diese Gruppen linearer Substitutionen spielen noch heute, z. B. in der Zahlentheorie, eine wesentliche Rolle in der mathematischen Forschung.

5 Funktionalanalysis

Bei mehreren Gelegenheiten hat sich den Mathematikern im 19. Jahrhundert von der Physik her das Problem gestellt, aus einer Gleichung der Art

$$f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

bei gegebenen Funktionen f und K die unbekannte Funktion φ zu bestimmen. Diese Aufgabe greift *Fredholm* 1903 in der Weise an, daß er das Integral mit der äquidistanten Einteilung des Intervalls [a, b] durch eine endliche Summe annähert und damit ein lineares Gleichungssystem ins Spiel bringt. Der Kern K steht dabei in Analogie zu einer Matrix, und diese Analogie führt auch zu entsprechenden Verallgemeinerungen von Eigenwerten usw. *Hilbert* lernt *Fredholms* Arbeiten im Jahre 1903 kennen und entwickelt in den Jahren 1904–1910 die allgemeine Theorie der Integralgleichungen. Er erkennt die Analogie symmetrischer Kerne zu den symmetrischen Matrizen und verallgemeinerte die Hauptachsentransformation in diesem Bereich. Die geometrische Sprechweise wird 1908 durch E. *Schmidt* und M. *Frèchet* eingeführt: Funktionen werden zu Punkten eines Raumes (oder Vektoren), sie haben Koordinaten, lineare Operatoren und Teilräume treten auf, man findet eine Orthonormalbasis usw. Die Theorie blüht auf, *Banach* beschreibt 1920 die nach ihm benannten Räume, und um 1925 wird sie zum wesentlichen Werkzeug der neu entstehenden Quantentheorie. Der für die Wirkung auf die lineare Algebra zu betrachtende Teil der Entwicklung schließt ab 1930 mit John von *Neumanns* Axiomatisierung der Theorie der Hilberträume und ihrer Operatoren.

6 Strukturtheorie

Um 1880 kennzeichnen *Kronecker* und *Weierstraß* die Determinante in der noch heute gebräuchlichen Weise als alternierende Multilinearform. Damit sind Struktureigenschaften angesprochen, welche bei vorausgesetzter Existenz die Determinante unabhängig von einer konstruktiven Einführung festlegen. Ähnlich arbeitet *Peano* in einem Buch über Graßmann 1888 die wesentlichen Eigenschaften des $\mathbb{R}^n$ heraus, die uns heute in der Gestalt der Axiome des reellen n-dimensionalen Vektorraums begegnen. Der Schritt in die Räume unendlicher Dimension wird zur gleichen Zeit wie bei den Integralgleichungen durch *Hamel* 1905 bei seiner Beschreibung nicht stetiger Lösungen der *Cauchy*-schen Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$ getan. Die von ihm eingeführte „*Hamel*-Basis" sehen wir heute als Basis des unendlichdimensionalen Raums $\mathbb{R}$ mit Skalaren aus $\mathbb{Q}$. Die Frage nach einem beliebigen Skalarbereich wird aber erst aktuell nach der ausführlichen Untersuchung von *Steinitz* 1910 über den allgemeinen Körperbegriff, in der man auch den sog. *Steinitz*schen Austauschsatz findet, der heute als Standardhilfsmittel bei der Einführung des Dimensionsbegriffs dient. Etwa um die gleiche Zeit gibt *Toeplitz* einen determinantenfreien Zugang zum Rangbegriff an und erwähnt nebenbei, daß die lineare Theorie über beliebigen (kommutativen) Körpern betrieben werden kann.

Lineare Algebra im heutigen Sinne findet man in dem sehr einflußreichen Lehrbuch „Raum, Zeit, Materie“ von Hermann *Weyl*, das zwar eigentlich der Relativitätstheorie gewidmet ist, aber vorweg die mathematischen Hilfsmittel von Grund auf entwickelt. Z. B. ist der affine Raum definiert als Punktmenge, auf der die additive Gruppe eines Vektorraums in bekannter Weise operiert. *Weyl* hat seine Gedanken von 1917 an in Vorlesungen in Zürich vorgetragen, sein Buch erlebte in den zwanziger Jahren viele Auflagen und war sehr populär. Wie viele Käufer die Paragraphen 2–4 durchgearbeitet haben, mag dahingestellt bleiben.
In die Anfängervorlesungen dringen diese Gedanken erst gegen Ende der zwanziger Jahre ein, aber nur sehr zögernd. Nach Vorlesungen von *Bieberbach* erscheint 1931 das Lehrbuch von *Schreier* und *Sperner* mit der neuartigen Darstellung. Diese Entwicklung fügt sich nahtlos ein in die Entstehung der modernen Algebra, die ausgehend von *Dedekind* und *Hilbert* durch Emmy *Noether*, E. *Artin* und B.L. *van der Waerden* ausgestaltet wurde und in *v.d. Waerdens* Buch 1930 ihren Ausdruck findet.

Die Entwicklung in unserem Lande und darüber hinaus nach dem zweiten Weltkrieg wird natürlich wesentlich beeinflußt durch die Wirkung der Gruppe *Bourbaki.* Ehe diese Wirkungen allgemein spürbar werden, erscheint das Lehrbuch „Analytische Geometrie“ von G. *Pickert.* Hier kommt die alte Tradition der Verbindung von Geometrie und Algebra zum Ausdruck, sowohl bei der Einführung und Motivierung der Begriffe wie beim ausführlichen Studium projektiver Räume. Die Theorie der Vektorräume präsentiert sich aber in axiomatischer Fassung. Um 1970 populäre Lehrbücher wie das von H.J. *Kowalski* [15] oder R. *Lingenberg* [16] haben sich dann weitgehend von der Geometrie gelöst und bringen eine reine Strukturtheorie der Vektorräume, mit geometrischen Anwendungen in den Endkapiteln. Neuerdings scheint sich eine stärkere Akzentuierung der Anwendungen anzubahnen, bei denen natürlich lineare Gleichungssysteme und Eigenwertprobleme im Vordergrund stehen. Ein Indiz dafür ist das erfolgreiche Buch von *Strang* [19], allerdings ist ein einheitliches Bild noch nicht zu gewinnen.

Literatur

Wir haben, wie schon in der Einleitung gesagt, hauptsächlich Sekundärliteratur benutzt. Deshalb nennen wir außer den gängigen Büchern über Geschichte der Mathematik nur einige wenige Originalarbeiten und Lehrbücher. Der an den Quellen interessierte Leser ist auf die Literaturangaben in den Sammeldarstellungen verwiesen, z. B. auf das Buch von Morris *Kline.*

[1] *Bourbaki, N.*: Elemente der Mathematikgeschichte. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
[2] *Boyer, C.B.*: A History of Mathematics. New York: Wiley 1968.
[3] *Boyer, C.B.*: Colin MacLaurin and Cramer's Rule. Scripta Mathematica *67* (1966), 377–379.
[4] *Cayley, A.*: Remarques sur la notation des fonctions algebriques. J. Reine Ang. Math. *50,* (1855), 282–285.
[5] *Crowe, M.*: A History of Vector Analysis. Notre Dame 1967.
[6] *Dieudonné, J.* (Hrsg.): Abrégé d'histoire des mathématiques. Paris: Hermann.

[7] *Fearnley-Sander, D.*: Hermann Grassmann and the Creation of Linear Algebra. Amer. Math. Monthly *86* (1979) 10, 809–817.
[8] *Feldmann, R.W.*: Arthur Cayley; founder of matrix theory. I–VI. MT *55* (1962), 482–484, 589–590, 657–659, MT *56* (1963), 37–38, 101–102, 163–164.
[9] *Fladt, K.*: Geschichte und Theorie der Kegelschnitte. Stuttgart: 1965.
[10] *Gericke, H.*: Die Geschichte des Zahlbegriffs. Mannheim: 1970.
[11] *Hawkins, T.*: The Theory of Matrices in the 19th. Century. Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Vancouver 1974, S. 561–570.
[12] *Juschkewitsch, A.P.*: Geschichte der Mathematik im Mittelalter. Leipzig: Teubner 1964.
[13] *Klein, F.*: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teile 1 und 2. Berlin: Springer 1979.
[14] *Kline, M.*: Mathematical Thought from Ancient to Modern times. Oxford University Press 1972.
[15] *Kowalski, H.J.*: Einführung in die Lineare Algebra. Berlin: 1971.
[16] *Lingenberg, R.*: Lineare Algebra. Mannheim: 1969.
[17] *Muir, T.*: The Theory of Determinants in the Historical Order of Development, 1906, Dover (reprint): 1960.
[18] *Pickert, G.*: Analytische Geometrie. Leipzig: 1953.
[19] *Strang, G.*: Linear Algebra and its Applications. Academic Press 1976.
[20] *Toeplitz, O.*: Über die Auflösung unendlich vieler linearer Gleichungen und unendlich vielen Unbekannten. Rend. Palermo *28* (1909), 88–96.
[21] *v.d. Waerden, B.L.*: Erwachende Wissenschaft. Basel: Birkhäuser 1966.
[22] *v.d. Waerden, B.L.*: Moderne Algebra, Berlin: 1930.

Anschrift der Autoren:

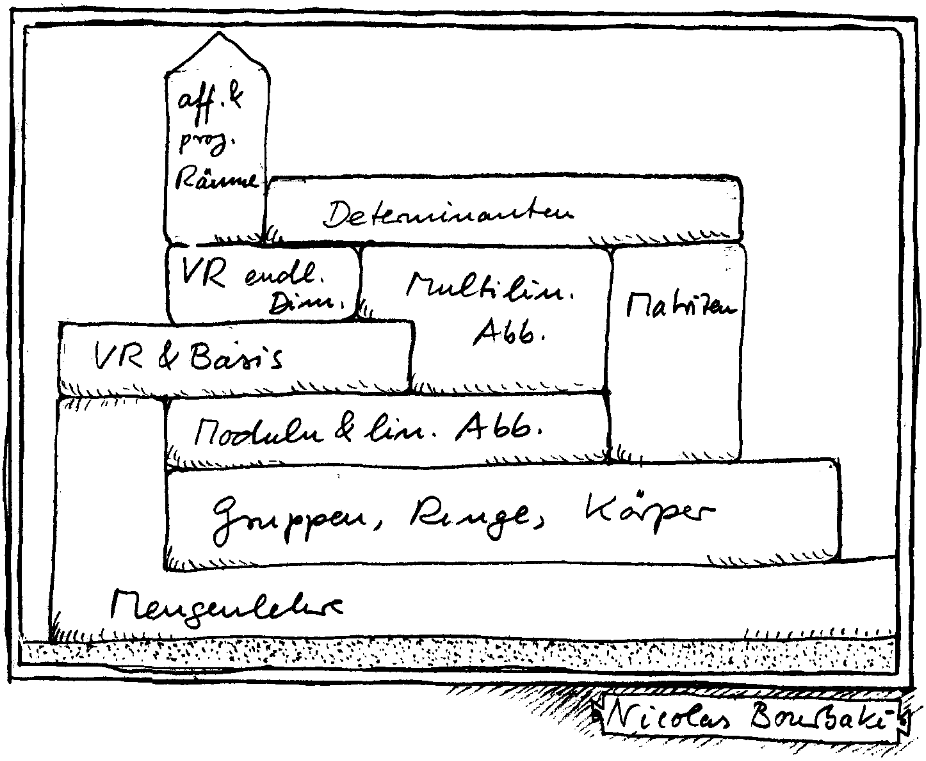
Prof. Dr. B. Artmann
Landwehrstr. 7a
6100 Darmstadt
dienstl.:
Arbeitsgruppe Fachdidaktik
im Fachbereich Mathematik
TH Darmstadt
Schloßgartenstr. 7
6100 Darmstadt

Prof. Dr. G. Törner
Scherpenberger Str. 75
4130 Moers
dienstl.:
Gesamthochschule Duisburg
Fachbereich Mathematik
Lotharstraße
4100 Duisburg

Ansichten der Linearen Algebra

Benno Artmann

Die in dieser Galerie gesammelten Bilder sollen dem Betrachter die sehr verschiedenen Aspekte der Linearen Algebra verdeutlichen. Man muß die Skizzen nehmen wie sie sind, bei keiner hat die Absicht Pate gestanden, irgend jemandem voll gerecht zu werden.



Bourbaki geht, seinem Anliegen von Ordnung und Übersicht folgend, vom Allgemeinen ins Einzelne. Auf die algebraischen Grundstrukturen folgen Moduln, Vektorräume und dann die Geometrie. Interessant sind die relativ selbständige Stellung der Matrizen und, auf der anderen Seite des Bildes, die direkte Einwirkung der Mengenlehre (via *Zorn*sches Lemma usw.) auf den Basisbegriff bei Vektorräumen nicht endlicher Dimension. Durch Vorwegnahme der basisfreien Teile der Theorie wird die Situation an vielen Stellen übersichtlicher als bei der Behandlung endlichdimensionaler Räume von Anfang an.