DER MATHEMATISCHE UND NATURWISSENSCHAFTLICHE UNTERRICHT

35. JAHRG., HEFT 6 — 1. September 1982

Abhandlungen

Erfahrungen und Bemerkungen zu Kursen in linearer Algebra[1])

Von GÜNTER TÖRNER

Mit 1 Abbildung

In der vorliegenden Vortragszusammenfassung setzt sich der Autor mit dem vielerorts beklagten Unbehagen nach Einführung von linearer Algebra als Kursinhalt auseinander. Es werden Hypotheken aufgezeigt, die zum Teil aufgrund von curricularen Randbedingungen, zum Teil aber auch stoffimmanent auf entsprechenden Kursen lasten.

In einem zweiten Teil werden einige Akzente zur Diskussion gestellt, die einem fachlich vertretbaren, unterrichtspraktikablen Kursvorschlag mit dem Titel ›Lineare Algebra‹ zugrundeliegen können, nämlich:

A: Geometrie-unabhängige Einführung des Vektorkalküls innerhalb einer breiten, anwendungsnahen Behandlung der linearen Gleichungssysteme

B: Ausführliches Arbeiten in und mit dem Matrix-Vektor-Kalkül

C: Vektorielle Koordinatengeometrie im $\mathbb{R}^3$

D: Spätes Hinführen zum Vektorraumbegriff.

In vielen Unterhaltungen mit Fachkollegen über den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II habe ich erfahren müssen, daß man vielerorten mit einem Kind sowohl der Reform des Mathematikunterrichts seit den Nürnberger Plänen anno 1965 als auch der ministeriell verordneten Oberstufenreform nicht recht froh werden will, nämlich mit den Kursen zur linearen Algebra. Immer wieder wird man in solchen Gesprächen an die seligen Zeiten der traditionellen analytischen Geometrie erinnert, in Bundesländern, in denen die Kurse (noch) den Titel ›Analytische Geometrie/Lineare Algebra‹ trugen (tragen), glaubt man aus guten Gründen den zweiten Komplex ignorieren zu können. Auf der anderen Seite trifft man auch auf Kollegen, die dem Kursinhalt ›Lineare Algebra‹ aufgeschlossen gegenüberstehen und durchaus dieser Materie interessante Aspekte abgewinnen bzw. auf die positive Resonanz der Schüler verweisen. Manche interessanten Elementarisierungen werden einem vorgezeigt und mit Begeisterung werden plötzlich in den unterschiedlichsten Bereichen lineare Strukturen entdeckt. Auf diesem Flügel habe ich aber auch Lehrer gesprochen, für die die Behandlung von Vektorräumen bzw. die Erarbeitung des Vektorraumbegriffs eine conditio sine qua non geworden ist, über die man nicht mehr zu diskutieren bereit ist.

Dieses weitgefächerte Spektrum von der kompromißlosen Ablehnung bis hin zu einer unabdingbaren Zustimmung zeigt, wie notwendig weiterhin eine intensive Diskussion über die Fragen ist. Andererseits, und das finde ich um der Sache willen bedauerlich, scheint mir eine gewisse Diskussionsmüdigkeit, vielleicht auch eine Resignation, eingetreten zu sein. So hat es den Anschein, als sei dieser Vortrag der einzige auf dieser Tagung, der sich explizit mit linearer Algebra beschäftigt. Ein ähnliches Bild bot sich dem Zuhörer auf der im März 1981 veranstalteten Tagung der Gesellschaft der Didaktik der Mathematik in Darmstadt. Ich kann mich des Gefühls nicht erwehren, daß die Worte von TOEPLITZ [1], die er vor genau 55 Jahren hier in Düsseldorf auf dem Kongreß Deutscher Naturforscher und Ärzte die Analysis betreffend zum Ausdruck brachte, heute auch die Situation um die lineare Algebra wiedergeben:

> *»Die Frage, ob es gut ist, daß die Schule sich ... einverleibt hat, lasse ich ganz beiseite. Sie ist nicht aktuell, denn es scheint mir, daß hier ein fait accompli vorliegt, ein irreversibler Prozeß, der bereits zu weit vorgeschritten ist, als daß man ihn zurücklaufen lassen könnte, selbst wenn man es wollte.«*

Was ich nun mit meinem Vortrag erreichen möchte, ist dieses oben geschilderte Unbehagen rational zu erklären (Teil 1) und in einem mehr konstruktiven Teil 2 punktuelle Lösungsmöglichkeiten aufzuzeigen.

1. Hypotheken, die auf linearer Algebra als Kursinhalt lasten

Wie wir alle wissen, sind mittlerweise drei Säulen der Oberstufenmathematik mehr oder weniger unumstritten: Analysis, lineare Algebra und Stochastik. Da diese Inhalte weitgehend eigenständig nebeneinander bestehen, hat die gesamte Diskussion einer neuen Mathematik in der Sekundarstufe II damit nur zu einem vordergründigen Konsens geführt. Platz ergriffen hat ein partikularistisches Prinzip des »Teile und herrsche«, verloren gegangen ist ein Bild der Mathe-

[1]) Vortrag auf der 72. Hauptversammlung des Deutschen Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Düsseldorf 1981.

matik als Ganzes, als Phänomen, ausgeblieben ist die Diskussion um eine intentionale Abstimmung dieser drei Standardkurse. Da wir alle dieses Defizit fühlen, versuchen wir verständlicherweise, in jeder Teildisziplin annähernd das Gesamtphänomen mit möglichst vielen seiner Schattierungen herauszustellen – wobei wir uns zwangsläufig in der linearen Algebra, für die i. allg. nur ein Schulhalbjahr zur Verfügung steht, übernehmen.

Die zweite Belastung hängt eng mit der eben ausgeführten zusammen: es handelt sich um die noch lange nicht ausdiskutierte Rolle der Geometrie im Mathematikunterricht. Es existiert eine umfassende Literatur zu Fragen der geometrischen Propädeutik, wenig wird dagegen angeboten für eine Nachbehandlung bzw. Fortführung der Mittelstufengeometrie. Hinzu kommt, daß anscheinend die Abbildungsgeometrie der Mittelstufe mehr denn je zur Disposition gestellt wird.

Diese unklaren Grundpositionen aber belasten die lineare Algebra durch Erwartungen, die die lineare Algebra nicht erfüllen kann. Darauf wies bereits Anfang der siebziger Jahre Freudenthal hin, als er es als illusorisch bezeichnete, die Geometrie durch die lineare Algebra retten zu wollen. Umgekehrt meine ich, daß eine Stützung der linearen Algebra im wesentlichen durch die Geometrie recht fraglich ist und wohl zu beiderseitigem Nachteil gereicht; Geometrie ist nicht par excellence das Entdeckungsfeld bzw. das Anwendungsfeld der linearen Algebra.

Lassen Sie mich zu einem dritten Komplex von Belastungen kommen, die nun in der linearen Algebra selbst zu suchen sind. Es ist vielleicht zu wenig bekannt, daß sich parallel zur Situation in der Schulmathematik lineare Algebra als Inhalt der Grundvorlesungen an den Hochschulen ebenfalls in einem Diskussionsstadium befindet (man werte einfach die neu erscheinenden Hochschultexte als »didaktische Vorschläge«). Wenn es eine Grundvorlesung gibt, die von der Mehrzahl der Studenten als steril empfunden wird, dann ist es die lineare Algebra. Es hat mich nicht überrascht und dennoch habe ich mit großem Interesse von einem Vorhaben erfahren, daß Prof. Dr. R. Wille (TH Darmstadt) derzeit unternimmt mit dem Titel »Restrukturierung der Mathematik«, ein Vorhaben, das sowohl als mathematisches Arbeitskonzept verstanden werden muß, als auch von wissenschaftsdidaktischer Qualität ist. Um was geht es dabei? Überspitzt und vereinfachend formuliert um folgendes: Stellen wir neu die Inhalte der üblichen Grundvorlesungen zur Disposition, was bleibt an unverzichtbaren Kernideen übrig, was sind lebendurchströmte Stämme, was ist Rankenwerk, was sind Arabesken? Oder was ist Fleisch, wo sind Knochen, was ist Speck? Es ist bezeichnend, daß R. Wille gerade bei der linearen Algebra begonnen hat und hier vorläufige Antworten gegeben hat. Seine These, so viel sei hier gesagt, lautet: *Die Bedeutung der linearen Algebra liegt darin, daß sie als Sprache »gute« Beschreibungen von Gegebenheiten unserer technischen-wissenschaftlichen Welt liefert.*

2. Akzente in einem Kurs ›Lineare Algebra‹

Der von R. Wille angesprochene Aspekt, lineare Algebra als Sprache anzusehen, beinhaltet eine hilfreiche Leitlinie, die von anderen Autoren unter dem Stichwort: Beziehungsinhalt gesehen wird. Eines macht uns allerdings dieser Vergleich sofort deutlich: wenn lineare Algebra als Sprache zu erwerben ist, so kann dieser Themenkreis in einem ersten Durchgang nicht um seiner selbst willen behandelt werden; eine »sprachwissenschaftliche Auseinandersetzung« mit dieser »neuen« Sprache darf erst später, wenn überhaupt, getrieben werden. Im Sinne dieses Vergleichs ist einigen Kursvorschlägen der Vergangenheit vorzuwerfen: es wird dort die Grammatik zu früh und zu stark betont.

Um konkreter zu werden, möchte ich einige Akzente setzen und näher erläutern:

A. Breite, anwendungsnahe Behandlung der linearen Gleichungssysteme (LGS); Beispiele etwa aus den Wirtschaftswissenschaften; geometrie-unabhängige Einführung des Vektorkalküls.

So einfach auch die Mathematik, die hinter linearen Gleichungssystemen steht, aussieht, so sehr kann die Bedeutung der LGS für die Mathematik niemals überschätzt werden. Wenn Sie eine Differentialgleichung durch Diskretisieren lösen wollen, wenn sie eine Eigenwertaufgabe zu bearbeiten haben, stets tauchen LGS auf, zumal es vielfach lediglich der lineare Fall ist, den man mathematisch passabel beherrscht. Neben dem Anwendungsaspekt zeigt ein historischer Rückblick auf: Gleichungssysteme sind so alt wie die Mathematik (vgl. z. B. Artmann, Törner [2]).

Gewiß, LGS sind Inhalte der Mittelstufenmathematik, aber warum sollte es verboten sein, »alte« Inhalte unter neuen Gesichtspunkten aufzugreifen? Entspricht ein solches Vorgehen nicht genau dem was wir fordern, wenn wir vom Spiralprinzip reden? Es lohnt sich, wie ich meine, da es sich bei LGS um den Prototyp eines integrierenden Kerns handelt, die wir gerade für die Oberstufenmathematik suchen. (Darauf soll in einer späteren Note eingehender eingegangen werden.) LGS beinhalten ein universelles, kanonisches Mathematisierungsmuster: Ob es sich um Mischungsaufgaben (Legierungen, Futtermittel, Diätpläne, Tabakmischungen usw.) handelt, ob es Verflechtungsaufgaben sind (innerbetriebliche Leistungsverrechnung, Teilebedarfsrechnungen usw.)[2]), das Muster ist stets ein und dasselbe – vorgelegt werden Bilanzen, aus denen die einzelnen Komponenten herauszulösen sind, kurz: das Entmischen von Mischungen, das Entflechten von Verflechtungen.

Das Augenmerk sollte bei der Behandlung mehr und mehr von den Lösungsformeln weg hin zu den Lösungs-

[2]) An dieser Stelle sei auf den umfangreichen Beispielkatalog in den niedersächsischen Handreichungen [3] verwiesen.

verfahren gerichtet sein, übrigens eine in der Mathematikgeschichte äußerst fruchtbare Standpunktverlagerung. Verschweigen Sie daher Ihren Schülern die weitgehend nur theoretisch relevanten Lösungsformeln über Determinanten.

Als Lösungsverfahren kommt einzig und allein der Gaußsche Algorithmus in Frage, ein systematisiertes Additionsverfahren, das sich durch dieses Schema zunächst weitgehend selbst erklärt:

$$\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array} \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}$$

Hier bietet sich im Unterricht die Möglichkeit, einmal über Mathematik zu sprechen, eine Gelegenheit, die man viel stärker nutzen sollte und auch in Schulbüchern üblich werden dürfte (Was kostet der Gaußsche Algorithmus? – Anzahl der Rechenschritte via vollständige Induktion. Wie effizient ist der Algorithmus? – Problem der Rundefehler).

Um das gesamte Phänomen der LGS im Unterricht in allen seinen Ausmaßen bewußt machen zu können, sollte man von vornherein den Blick nicht durch eine Beschränkung auf (3,3)-Systeme verengen. Die im Unterricht zu diskutierenden Systeme sollten im Bewußtsein des Schülers durchaus 2000 Unbekannte haben dürfen. Wie kann ein solches Ziel erreicht werden?

Damit bin ich beim zweiten Akzent angelangt:

B. Ausführliches Arbeiten in und mit dem Matrix-Vektor-Kalkül; vielfältiger Einsatz von Matrizen als universalem Werkzeug.

Gestatten Sie zunächst eine äußerst kompromißlose Stellungnahme: Eine lineare Algebra ohne Matrizenrechnung verdient nicht den Namen lineare Algebra. Positiv betrachtet läßt sich nämlich folgendes feststellen: jede Sachanalyse der linearen Algebra belegt, daß sich Matrizen als universales Sprachmittel verwenden lassen; fast alle wesentlichen Ergebnisse sind mit ihrer Hilfe zu gewinnen bzw. zu formulieren. Auch eine Bedarfsanalyse bei zukünftigen Benutzern der linearen Algebra (empirische Wissenschaften, Wirtschaftswissenschaften, Ingenieurwissenschaften usw.) bestätigt unsere Position. Ebenfalls sprechen pädagogische Gründe für den Matrizenkalkül, zumal man im Grundkurs nun ein nicht triviales, aber doch beherrschbares Routinematerial anbieten kann, welches zudem noch in sich reichhaltig und interessant ist. Viele Beobachtungen bestätigen, daß für zahlreiche Schüler die Möglichkeit des Handhabens konkret hingeschriebener Objekte von außerordentlicher Wichtigkeit ist.

Zurück zu den Gleichungssystemen: Es bedarf im Unterricht nur eines geringen Anstoßes, um Gleichungssysteme in der Matrix-Vektor-Schreibweise zu notieren. Wir haben damit zwei neue informationsträchtige Sprachmittel, d. h. Beschreibungsmöglichkeiten entdeckt: Vektoren als n-stellige Listen, Matrizen als (m,n)-stellige Zahlenschemata. Mehr noch: Die Rückinterpretation dieser stenographischen Notation liefert eine neue Verknüpfung, die Matrix-Vektor-Multiplikation. Durch diese operative Verankerung werden Matrizen und Vektoren zu eigenständigen Rechenobjekten, wodurch die Kluft zwischen den Aussagenformen

$$2x = 3 \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

überbrückt wird. Dieser Einstieg wird voll durch positive Erfahrungen bestätigt; übrigens handelt es sich auch um einen entscheidenden mathematikhistorischen Aspekt (vgl. [2], S. 64).

Wie von selbst drängen sich im Unterricht die Fragen auf: Darf man durch Matrizen dividieren? Was heißt überhaupt, Matrizen zu multiplizieren? Welche Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede bestehen zum Rechnen mit (reellen) Zahlen? Wie berechnet man die Inverse einer Matrix?

Auf den ersten Blick erscheint dieser Ansatz als Teufelskreis, als Zirkelschluß und dennoch, wir haben uns nicht im Kreis bewegt, sondern sind auf der Lernspirale eine entscheidende Windung vorangekommen (Abb. 1). Übrigens scheint nach den ersten Beobachtungen durch das nun notwendige sorgfältige Hantieren der Matrizen (Achtung: Kommutativgesetz gilt nicht!) eine vertiefte Einsicht in die üblichen Rechengesetze von $\mathbb{R}$ gewonnen zu werden; gewiß, auch an früherer Stelle treten im Unterricht nichtkommutative algebraische Strukturen auf, die aber anscheinend für den Schüler nicht immer überzeugend sind, zumal sie vielfach »zahlenfern« sind. Dahingegen scheint der Matrizenkalkül ein reales, gewichtiges Gegenbeispiel zu sein.

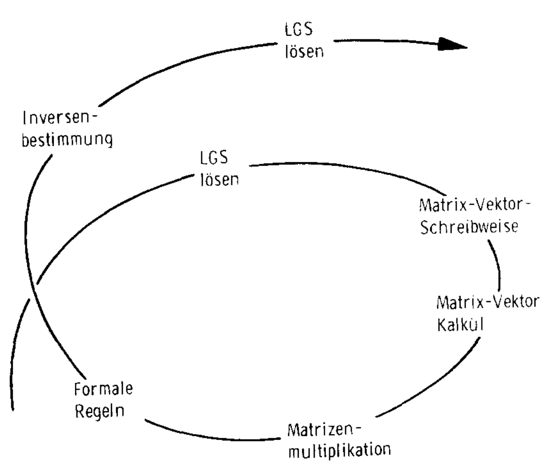

Abb. 1

Wie könnte es jetzt weitergehen? Es sollte sich eigentlich erübrigen, darauf zu verweisen, daß wir den Matrix-Kalkül nicht um seiner selbst willen thematisiert haben. Die Literatur zeigt viele Anschlußmöglichkeiten auf, ich erinnere z. B. an die schon oben zitierten Materialien in den Handreichungen aus Niedersachsen, aber auch an das Buch von LEHMANN [4], an die Arbeit von LANGWITZ [5], an jene Vorschläge, etwa von v. D. STEINEN [6], ein Stück Eigenwerttheorie, insbesondere im Zusammenhang mit stochastischen Matrizen, zu erörtern.

In unserem Kurs (ARTMANN, TÖRNER [7]) haben wir die folgenden zwei Wege beschritten, nämlich

(I) die Theorie der LGS aufzuzeigen, indem man den Gaußschen Algorithmus als Verfahren zur Herstellung von Projektionsmatrizen ($\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$) entschlüsselt (Geometrie der Gleichungssysteme),

(II) lineare Abbildungen, repräsentiert durch Matrizen, geometrisch zu verankern (Geometrie der Matrizen, funktionaler Aspekt).

Auf Einzelheiten kann an dieser Stelle nicht eingegangen werden, dagegen möchte ich noch kurz einiges zu zwei anderen Aspekten der linearen Algebra anmerken, nämlich zur Rolle der Geometrie und der Stellung der Axiomatik im Kurs.

Wie ich schon eingangs betont habe, sehe ich zunächst einmal das Verhältnis der Geometrie zur linearen Algebra relativ distanziert. Einerseits ist die lineare Algebra eine Sprache, wenn man so will, eine elaborierte Sprache; auf der anderen Seite ist auch die Geometrie eine solche, sicherlich eine noch ursprünglichere Sprache, eine der angeborenen Muttersprachen der Mathematik überhaupt. Sicherlich ist in der linearen Algebra der Akzent diese Muttersprache ›Geometrie‹ nicht zu verleugnen, in gleicher Weise haben aber auch andere Dialekte zur Herausbildung der Sprache ›Lineare Algebra‹ beigetragen. Daraus ergeben sich, wie ich meine, die folgenden Konsequenzen.

1. Es ist legitim, Vektoren arithmetisch einzuführen; primär sind also Vektoren algebraische Objekte, jene Listen, für die die bekannten Gesetze des Matrix-Vektor-Kalküls entdeckt wurden. So stellt sich nicht von vornherein das Problem der Dimensionsgrenze 3. Unsere naive Vorstellung des Anschauungsraumes ermöglicht uns nun eine geometrische Repräsentation der 3-stelligen Listen im Koordinatenraum $\mathbb{R}^3$.

2. Beachten Sie: Erst die Geometrie des $\mathbb{R}^3$ ist reichhaltig genug, um ein Gespür für die Situation im n-dimensionalen Raum zu erhalten, wo hingegen die Geometrie der Ebene eher atypisch ist.

So setze ich den folgenden Akzent:

C. Bevorzugen der räumlichen Geometrie vor der ebenen Geometrie, Arbeiten im dreidimensionalen Koordinatenraum.

Eine Identifizierung des geometrischen Raumes mit dem Koordinatenraum $\mathbb{R}^3$ bereitet keine Schwierigkeiten. Grundsätzlich sind Vektoren jene oben beschriebenen algebraischen Objekte, die im geometrischen Gewand (im $\mathbb{R}^3$) sowohl als Pfeile als auch als Punkte erscheinen können. Man bedient sich somit, jeweils der Situation angepaßt, bewußt zweier gleichwertiger geometrischer Argumentationsebenen Pfeilsprache – Punktsprache, wobei die algebraische Ebene gleichsam letzte Instanz ist.

Pfeilsprache	Punktsprache
Vektoren sind...am Nullpunkt angeheftete Pfeile	...Punkte in einem dreidimensionalen Koordinatenraum.
Vektoraddition erklärt sich...als geometrische Pfeiladdition	...via Parallelogrammkonstruktion.
Der Vektorbetrag ist... die Pfeillänge	...ist der Abstand zum Nullpunkt.

Um keine Mißverständnisse aufkommen zu lassen: es geht uns nicht um eine Thematisierung der komplexen mathematischen Doppelstruktur »affiner Raum«, sondern um ein nicht weiter zu problematisierendes geometrisches Verständigen auf diesen gleichwertigen Ebenen, so wie man etwa in der Algebra von $\mathbb{Q}$ die Elemente als Operatoren und Zustände zugleich auffaßt. Ich glaube nicht, daß man in Kursen bei Beschränkung auf einen einzigen Akzent (Pfeile bzw. Punkte) bis ins letzte konsequent bleiben kann; irgendwo werden versteckte Anspielungen auf die jeweils andere Sprachform gemacht. Ein Problem, das notwendigerweise aufgearbeitet werden müßte, zu dem ich hier nichts sagen will, besteht darin, ob nicht gerade durch die bekannte Vektorrechnung in der Sekundarstufe I Geleise eingefahren werden, die nachher nur schwer zu verlassen sind, wenn wir nämlich Vektoren als Funktionen (Pfeilklassen, Translationen) behandeln.

D. Spätes Hinführen zum Vektorraumbegriff- und theorie, Bevorzugen einer charakterisierenden vor einer abstrahierenden Axiomatik.

Diese Position wird zweifellos durch die Geschichte bestätigt. Wie lange hat man mit Erfolg mit Vektoren in unterschiedlichen Verkleidungen gearbeitet, im Prinzip die Lösungstheorie für LGS gehandhabt, ohne unmittelbar von Vektorräumen zu sprechen, von einer Relativierung des Grundkörpers $\mathbb{R}$ ganz zu schweigen. Auch neuere Hochschultexte können sich (wieder) einige ...zig Seiten gedulden (NOBLE, DANIEL [8, S. 103], STRANG [9, S. 44]), bis man um den Vektorraumbegriff nur noch schwer herumkommt, etwa wenn man Mengen von Linearkombinationen studieren muß. In natürlicher Weise drängt sich die Definition eines Teilraumes (ohne daß vorher der ganze Raum zum Vektorraumbegriff relativiert worden ist), und um alle Phänomene bei LGS berücksichtigen zu können, sieht man sich vor die Aufgabe gestellt, z. B. alle Teilräume des $\mathbb{R}^3$ zu klassifizieren (charakterisierende Axiomatik). Ähnlich ist die Fragestellung (vgl. [7]), wenn die Linearitätseigenschaften der Matrix-Vektor-Multiplikation relativiert werden,

nämlich $A(x+y) = Ax + Ay$

bzw. $A(rx) = rAx$,

und man nach evtl. anderen geometrisch interessanten Abbildungen mit diesen funktionalen Eigenschaften fragt.

Erst jetzt scheint die Frage nach einer Charakterisierung des Raumes $\mathbb{R}^3$ berechtigterweise in der Luft zu liegen, kurz: die Definition eines Vektorraums steht an. Ein wesentliches Beispiel ist dem Lernenden vertraut, nämlich der anschaulich interpretierbare Raum $\mathbb{R}^3$. Es ist natürlich für den Lernenden am Anfang einer Theorie schwer zu erkennen, welche Bedeutung für den weiteren Aufbau ein ihm vorgeführtes Beispiel hat; an einer Antwort sollte man sich im Leistungskurs nicht vorbeimogeln. Nehmen wir an (vgl. [7]), die lineare Algebra sei die Zoologie und setzen Vektorraum = Tier. Zutreffend läßt sich sagen: die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und ihre Teilräume sind das Nutzvieh. Das besagt nichts dagegen, daß sich ein Spezialist sein Leben lang mit wunderschönen Kolibris beschäftigt. Auch wird man den Kindern nicht verwehren, mit gelehrigen Meerschweinchen (nehmen wir als Beispiel magische Quadrate) zu spielen; man wird in einem zoologischen Garten auch einen kollossalen Elefanten (etwa den Vektorraum der reellen Funktionen über [0,1]) bewundern können (ob er in unseren Zivilisationsverhältnissen lebensfähig ist und von uns eingesetzt werden kann, muß bezweifelt werden). Deutlich werden muß jedoch im Unterricht: die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ (und ihre Teilräume) sind von überragender Bedeutung und alle anderen Tiere können, was die »Verwertbarkeit« angeht, (in unseren Breiten – sprich: in Kursen der Sekundarstufe II) mit ihnen überhaupt nicht konkurrieren.

Literatur

[1] O. Toeplitz: Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihrer Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. – Jahresb. Deutsche Mathematiker Vereinigung **36** (1927) 88–100.
[2] B. Artmann – G. Törner: Zur Geschichte der Linearen Algebra. – MU **27** (1981) Nr. 2, 59–67.
[3] Der Niedersächsische Kultusminister (Hrsg.): Handreichungen für Lernziele, Kurse und Projekte im Sekundarbereich II für das mathematisch-naturwissenschaftlich-technische Aufgabenfeld C4 1977.
[4] E. Lehmann: Matrizenrechnung. – München: Bayerischer Schulbuchverlag 1975.
[5] D. Laugwitz: Motivationen im mathematischen Unterricht. Das Beispiel Lineare Algebra. In M. Glatfeld (Hrsg.): Mathematik lernen. – Braunschweig: Vieweg 1977.
[6] J. v. d. Steinen: Ein Stück Eigenwerttheorie. MU **23** (1977) Nr. 1, 42–58.
[7] B. Artmann – G. Törner: Lineare Algebra. Grund- und Leistungskurs. – Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht 1980.
[8] B. Noble – J. W. Daniel: Applied Linear Algebra. – Englewood Cliffs: Prentice Hall 1977.
[9] G. Strang: Linear Algebra and its Applications. – New York: Academic Press 1976.

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. G. Törner, Fachbereich Mathematik der Universität Duisburg, Postfach 101629, 4100 Duisburg

Freie Energie und freie Enthalpie als Gleichgewichts- und »Hilfs«-Funktionen

Von Friedhelm Kober

Mit 3 Abbildungen

Der vorliegende Artikel zeigt, wie die allgemeine Gleichgewichtsbedingung der Thermodynamik, $S = S_{max}$ bzw. $\mathrm{d}S = 0$, durch die (für den Chemiker sehr viel praktischeren) Bedingungen $\mathrm{d}G = 0$ bzw. $\mathrm{d}F = 0$ ersetzt werden können. Am Beispiel des Gay-Lussacschen Versuches wird gezeigt, wie der partielle Differentialquotient $(\partial U/\partial V)_T$ für ein ideales und ein reales Gas mit Hilfe der Funktionen F und G berechnet werden kann.

1. Einleitung und Zielsetzung

Im Zusammenhang mit dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik lernt jeder Student, daß ein sich selbst überlassenes System den Zustand maximaler Entropie anstrebt, daß also $S = S_{max}$ bzw. $\mathrm{d}S = 0$ eine universelle thermodynamische Gleichgewichtsbedingung ist (Abb. 1).

Kurz darauf erfährt er dann aber, daß der Chemiker für die freie Enthalpie G und die freie Energie F die Bedingungen $\mathrm{d}G = 0$ bzw. $\mathrm{d}F = 0$ verwendet, um den Gleichgewichtszustand zu definieren. Im vorliegenden Artikel soll gezeigt werden, daß diese drei Bedingungen – unter bestimmten Randbedingungen – einander äquivalent sind, daß G und F also keine »Konkurrenz«-Funktionen von S sind, sondern eben nur unter bestimmten Bedingungen S ersetzen.