Sonderdruck

aus

Didaktik der Mathematik

Bayerischer Schulbuch-Verlag

Lisa Hefendehl-Hebeker/Günter Törner

Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik

Anliegen der Studie ist eine Darstellung von Schwierigkeiten beim Erlernen der Kombinatorik, die von grundsätzlicher Bedeutung für eine Didaktik der Kombinatorik sein könnten. Das zugrundegelegte Unterrichtskonzept versucht, das viel zitierte „didaktische Potential" der Kombinatorik zu nutzen, indem es eine schablonenhafte Beschränkung auf die klassischen kombinatorischen Grundaufgaben vermeidet und die Schüler in erster Linie mit den hinter den Regeln stehenden fundamentalen Ideen und Strategien vertraut macht. Als wesentlich werden dabei die drei Zählprinzipien Produktregel, Summenregel und „Prinzip der Schäfer" sowie die Hilfsstrategien der Einführung und Rücknahme von Unterscheidungen bzw. Anordnungen erachtet.

Die eigentliche Schwierigkeit beim Lösen von Aufgaben der elementaren Kombinatorik besteht dann im Erkennen der passenden Lösungsstrategie sowie in der Strukturierung der Aufgabendaten in Form eines der Strategie angepaßten Schemas. Dabei ist eine Orientierung an natürlichen Handlungsabläufen nicht immer möglich; sie kann sogar hinderlich sein und Scheineinengungen verschiedener Art bewirken. Somit gewinnt das in allen Bereichen der Mathematik anzutreffende Mühen um das Erkennen isomorpher Strukturen hier bereits in elementarem Kontext besondere Bedeutung. Durch diese Beobachtungen wird die Aufmerksamkeit zwangsläufig auch auf das Problem der Erstellung geeigneten Aufgabenmaterials gelenkt.

Ausgangspunkt der folgenden Diskussion[1] waren (unerwartete) Schwierigkeiten, die wir innerhalb des Stochastikunterrichts in zwei Grundkursen der Sekundarstufe II bei der Behandlung der Kombinatorik machten. Da einerseits die im Rahmen der Stochastik behandelte Kombinatorik für alle Schüler Neuland war, andererseits ähnliche Schwierigkeiten bei jüngeren durch Fallstudien des ersten Autors nachgewiesen werden konnten, meinen wir, daß die darzustellenden Phänomene von grundsätzlicher Bedeutung für eine Didaktik der Kombinatorik sein könnten; eine Interpretation erscheint uns um so dringlicher, als die didaktische Diskussion in der Literatur spärlich ist (vgl. lediglich Kapur [17], Kütting [20] und Perko [22]).

1. Zur Abgrenzung des Themas

Bekanntlich ist Kombinatorik im gymnasialen Mathematikunterricht i. a. kein eigenständiges Stoffgebiet. Neben einer Einbindung in Kurse über endliche Geometrie oder rekursive Verfahren tritt sie hauptsächlich innerhalb der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf. Wird diese auf Laplace'sche Wahrscheinlichkeitsräume, also auf ihren historisch-genetischen Ursprung, beschränkt, so bilden die kombinatorischen Zählverfahren das einschlägige Werkzeug, auf dessen geeigneten Einsatz sich jedes Problem reduzieren läßt. In älteren Schulbuchwerken und insbesondere in der Lehrbuchliteratur für den Anwender von Mathematik (Biomathematik, Sozialwissenschaften usw.) beinhaltet die Kombinatorik, zumeist losgelöst von der Stochastik und in Gestalt eines Vorratswissens bereitgestellt, aus-

1 Herrn Kollegen Kirsch danken wir herzlich für kritische Anmerkungen.

schließlich eine Behandlung der sog. klassischen kombinatorischen Grundaufgaben. Auf die Mängel dieser Darbietungen hat u. a. Kirsch [18] hingewiesen (vgl. auch Abschnitt 2).

Demgegenüber scheint sich in neueren Kursheften, auch unter dem Aspekt, Minimallehrgänge für Grundkurse zu konzipieren, eine stärker integrative Behandlung durchzusetzen, wobei man bewußt auf eine vollständige Diskussion der Grundaufgaben verzichtet und unter Benutzung von wenigen Grundprinzipien, insbesondere der Produktregel, Aufgabenstellungen der elementaren Kombinatorik ad hoc bewältigt.

Die dabei auftretenden Schwierigkeiten werden wir in Abschnitt 3 ausführlich erörtern und exemplarisch durch Aufgaben belegen. Unsere Aufmerksamkeit wird dabei zwangsläufig auch auf das Aufgabenproblem gelenkt, dem wir den Abschnitt 5 widmen. Abschnitt 4 beinhaltet das Problem der Isomorphie bei kombinatorischen Aufgabenstellungen.

2. Die sogenannten klassischen Grundaufgaben

Es wird immer wieder darauf hingewiesen, daß die Kombinatorik viel „didaktisches Potential“ enthalte (z. B. Jeger [15, S. 14]), insbesondere die Schüler zum kreativen Denken anregen könne und deshalb auf der Schule entsprechend zu pflegen sei. Eine Zusammenstellung möglicher allgemeiner Rechtfertigungen für die Behandlung der Kombinatorik im Schulunterricht sowie eine Auflistung der in ihr liegenden didaktischen Vorzüge findet man bei Kütting [20, S. 174/175] bzw. Perko [22, S. 153].

Will man den damit verbundenen Zielen gerecht werden, so wird man die Kombinatorik nicht unterrichten als ein System von Rechenregeln, in die lediglich numerische Daten eingesetzt werden. Das wäre nach Freudenthal [13, S. 534] „entarteter Unterricht“. Man wird also nicht den Weg einer schnellen Erarbeitung der kombinatorischen Grundfiguren und anschließender Anwendung gehen, wobei die Anwendung dann darin besteht, die benötigte Grundfigur aufzusuchen und die Aufgabendaten in die zugehörige Lösungsformel einzusetzen. Eine schablonenhafte Beschränkung auf die „klassischen“ Grundprobleme verbietet sich aus drei Gründen:

2.1. *Inhaltlich* muß man sich (trivialerweise) auf Anwendungsprobleme beschränken, die zu den kombinatorischen Grundaufgaben passen! Wie die folgenden Aufgaben zeigen, fallen bereits naheliegende Fragestellungen aus dem System heraus:

Aufgabe 1: In einer Lieferung von 100 Glühbirnen befinden sich 3 defekte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß a) unter 4 b) unter 6 zufällig ausgewählten Glühbirnen mindestens eine defekte ist? (Bosch/Wolff [8, S. 53])

Aufgabe 2: Ein Gärtner pflanzt eine Hecke aus 20 Fichten. Drei von den Pflanzen haben eine Baumkrankheit, die der Gärtner jedoch mit bloßem Auge nicht erkennen kann. a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß diese drei Bäume nebeneinander gepflanzt werden? b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß mindestens zwei Bäume nebeneinander gepflanzt werden?

In Abschnitt 5 werden wir noch einmal ausführlich zum Aufgabenproblem Stellung nehmen.

2.2. Die *traditionelle* („klassische") *Bezeichnungsweise*, die die Vokabeln Permutation, Kombination, Variation, mit bzw. ohne Wiederholung, verwendet, ist fachlich gesehen antiquiert und prägt sich zudem nicht leicht ein. Darauf haben u.a. Kirsch [18] und Borges [6] mit Nachdruck hingewiesen. Mittlerweile ist in der Neuausgabe von DIN 1302 (siehe Borges [7]) eine einheitliche Terminologie verfügbar, wobei man sich wechselseitig ergänzend auf das *Urnenmodell*, das *Verteilungsmodell*, das *Wortmodell* und das *Mengenmodell* bezieht. Die letzten Modelle bedienen sich moderner mathematischer Begriffsbildungen, deren Bedeutung nicht auf die Kombinatorik beschränkt ist (Mengen, Abbildungen, Relationen). Eine Formulierung der kombinatorischen Grundaufgaben mit Hilfe dieser Begriffe liefert einerseits eine einheitliche Darstellungsweise für die Kombinatorik und erschließt damit andererseits die Kombinatorik als Anwendungsfeld für wichtige mathematische Grundbegriffe, verhält sich also auf Schulniveau im Sinne des Integrationsprinzips. Innerhalb der Kombinatorik erscheinen die Grundaufgaben dann als wichtige Spezialfälle; die bei der Formulierung erworbenen Strategien weisen aber über diese hinaus.

2.3. *Didaktisch* verkennt ein vorgefertigtes Lösungsschema die eigentlichen Anforderungen beim Lösen kombinatorischer Aufgaben. Bereits das Erkennen des Aufgabentyps erfordert vom Schüler die Fähigkeit zur Analyse der vorgelegten Aufgabe und deren Übersetzung in ein Modell, in dem die Grundfiguren formuliert sind. Insbesondere muß der Schüler wissen, welche Objekte der Aufgabe als unterscheidbar oder nicht unterscheidbar, geordnet oder nicht geordnet angesehen werden müssen. Mithin erwartet man bereits unausgesprochen, daß der Schüler mit den hinter den Regeln stehenden fundamentalen Ideen und Strategien der Kombinatorik vertraut ist.

Das didaktische Problem verlagert sich also dahin, daß die für die Kombinatorik benötigten fundamentalen Ideen und Strategien richtig diagnostiziert und vermittelt werden. Als grundlegend erachten wir die folgenden *drei Zählprinzipien*:

1. die *Produktregel* oder das fundamentale Zählprinzip;

2. die Summenregel oder *Regel des getrennten Abzählens* als Spezialfall des Prinzips der Inklusion und Exklusion;

3. das „*Prinzip der Schäfer*" als Spezialfall des Prinzips der doppelten Abzählung.

Hilfsstrategien bei der Anwendung des Prinzips der Schäfer sind:

- Einführung und Rücknahme von Anordnungen
- Einführung und Rücknahme von Unterscheidungen.

Diese fundamentalen Techniken werden wir anschließend ausführlich diskutieren. Mit ihrer Hilfe können die kombinatorischen Aufgaben in ihrem jeweiligen Gewand gesehen und in „natürlicher Weise" gelöst werden (s. Kütting [20, S. 103]); mit ihrer Hilfe können auch die klassischen kombinatorischen Grundprobleme als wichtige Spezialfälle bearbeitet werden. Die Lösungsformeln bilden dann eine zusätzliche Absicherung für die Schüler, sind aber nicht die einzigen Stützpfeiler. Übergeordnet bleiben die Grundfähigkeiten, die sogar die Rekonstruktion der Formeln erlauben. Damit verschiebt sich die Funktion der kombinatorischen Grundaufgaben von der alleinigen Grundlage zur mathematischen Abrundung einer auf Kreativität und Vielfalt beruhenden Arbeit.

3. Drei Zählprinzipien

3.1. Die Produktregel oder das „grundlegende Zählprinzip“

Den *mathematischen Hintergrund* dieser Regel bildet die Berechnung der Mächtigkeit eines cartesischen Produktes $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ aus endlich vielen endlichen Mengen A_i $(1 \leq i \leq n)$ durch Multiplikation der einzelnen Mächtigkeiten:

$$\operatorname{card}\left(\mathop{\mathrm{X}}_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{card}(A_i).$$

So gesehen, hat die Produktregel *statischen* Charakter.

Die *didaktische Umsetzung* gründet sich zumeist auf die Vorstellung eines in n unabhängigen Stufen bzw. Teilversuchen ablaufenden Experimentes, ist also *dynamisch, handlungsbezogen*. Berechnet wird die Anzahl der Ergebnisse des zusammengesetzten Experimentes. Der entscheidende Sachaspekt besteht darin, daß die Anzahlen der Teilergebnisse auf den einzelnen Stufen voneinander unabhängig sind: „Das fundamentale Zählprinzip kann nur angewandt werden, wenn die Anzahl der Möglichkeiten für den zweiten Schritt für jede Wahl des ersten Schrittes dieselbe ist.“ (Johnston u.a. [16, S. 12])

Für die *Darstellung* eines solchen Experimentes bieten sich alle drei Repräsentationsebenen an. Das Experiment kann enaktiv ausgeführt werden, wobei vielfach nicht alle möglichen Ergebnisse gleichzeitig realisierbar sind. Es kann auch ikonisch durch ein Baumdiagramm oder symbolisch durch eine Menge geordneter n-Tupel repräsentiert werden. Ein Bindeglied zwischen den Repräsentationsebenen bilden die Codewörter, die entstehen, wenn man die Pfade eines Baumdiagramms durch Symbole beschriftet. Löst man die Codewörter aus dem Baumdiagramm heraus, so sind an ihnen rückwirkend noch die Pfade ablesbar. Die Codewörter können aber auch handlungsbezogen interpretiert werden als Kurzprotokolle eines Versuchsablaufes (*dynamische Sicht*) oder eines Versuchsergebnisses (*statische Sicht*) und sind dabei im wesentlichen geordnete n-Tupel.

Alle Darstellungsweisen begründen geordnete Strukturen: der geordnete Ablauf der Handlung in der Zeit, das Baumdiagramm, dessen Pfade von der Wurzel bis zum Ende durchlaufen werden, und schließlich die geordneten Codewörter und n-Tupel.

Um die Produktregel anwenden zu können, ist die *Organisation* der Aufgabendaten *in Form eines Stufenablaufes* notwendig, und hierin liegt eine entscheidende Schwierigkeit für den Unterrichtsalltag.

Problemlos sind Aufgaben vom Typ

Aufgabe 3: Gegeben sind die Ziffern 1, 2, 3 und 4. Wie viele dreiziffrige Zahlen kann man bilden, wenn keine Ziffer wiederholt werden darf?

Aufgabe 4: Bei einer Wanderung müssen 3 Flüsse durchquert werden. Über den ersten Fluß gibt es 2 Brücken, über den zweiten 4 und über den dritten Fluß 3 Brücken. Wie viele verschiedene Möglichkeiten der Überquerung gibt es?

Es ist naheliegend, daß sich der Schüler bei der Organisation eines Stufenablaufes an der *Dynamik natürlicher Handlungsabläufe* orientiert, was sich in manchen Fällen als hilfreich für das Auffinden geeigneter Stufungen erweist, in anderen Fällen eher *hinderlich* ist. Aus diesem Grunde sollten die diskutierten Schwierigkeiten nicht nur auf dem enaktiven Repräsentationsniveau gelöst werden, sondern gerade im Hinblick auf eine Vermeidung von falschen Fixierungen ikonisch und möglichst symbolisch bewußt bearbeitet werden.

Aufgabe 5 belegt, daß der zugrundeliegende natürliche Handlungsvorgang nicht immer eine zielgerechte Strukturierung liefert:

Aufgabe 5: Beim Verteilen der Skatkarten bekommt ein Spieler drei der vier Buben, zwei der vier Asse und fünf der 24 sonstigen Karten. Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es für ein solches „Blatt"? (Althoff/Kosswig [1, S. 72]).

Eine Orientierung am gebräuchlichen Verfahren der Kartenausteilung führt hier nicht zu einer der Produktregel angepaßten Stufung. Vielmehr muß man sich das Austeilen der Karten an den fraglichen Spieler etwa so schematisiert denken:

1. drei Karten aus der Menge der vier Buben;
2. zwei Karten aus der Menge der vier Asse;
3. fünf Karten aus der Menge der 24 übrigen Karten.

Somit ist der Stufungsprozeß nur eine Schematisierungs*hilfe* zum Abzählen bestimmter Konstellationen, ein Gerüst, das nicht immer auf natürliche Weise sichtbar ist. Einer Aufgabe können daher unterschiedliche Stufungsprozesse angemessen sein, so daß die jeweilige Anzahl der Stufen und die Anzahl der möglichen Teilergebnisse auf den Stufen keine Invarianten sind. Vielfach leistet das *systematische Auflisten*, das dem *systematischen Abzählen* vorangestellt werden sollte, eine wertvolle propädeutische Hilfe für das Erkennen von Stufungsprozessen.

Entscheidend ist, daß eine Stufung die *Unabhängigkeit* der Stufen garantiert. Schüler versuchen jedoch immer wieder, auch in anderen Situationen mit der Produktregel zu arbeiten, etwa bei der

Aufgabe 6: Wie viele Möglichkeiten gibt es, 10 Kaninchen auf 3 Käfige zu verteilen? (nach Engel 1973, S. 43).

Hierzu liefern manche Schüler einen Lösungsansatz, der die Besetzung der Käfige in die folgenden drei Stufen einteilt:

1. Stufe: Besetzung des 1. Käfigs mit a Kaninchen – $\binom{10}{a}$ Möglichkeiten;

2. Stufe: Besetzung des 2. Käfigs mit b Kaninchen – $\binom{10-a}{b}$ Möglichkeiten;

3. Stufe: Besetzung des 3. Käfigs mit den restlichen Kaninchen.

Daß der Lösungsansatz die Kaninchen als unterscheidbar ansieht, ist wegen der ungenauen Aufgabenformulierung zulässig. Die Anzahlen für die Ergebnisse auf den einzelnen Stufen liegen jedoch weder absolut fest, noch sind sie voneinander unabhängig. Das Problem verschiebt sich dahin, alle Zerlegungen der Zahl 10 in drei nichtnegative Summanden zu bestimmen.

Die Frage, über welche Objekte der Aufgabenstellung gestuft werden kann und über welche auf keinen Fall oder nur mit Vorsicht gestuft werden darf, wird vielfach durch *Dichotomien* störend beeinflußt. Betrachten wir dazu die

Aufgabe 7: Die Schüler Klaus, Ingo und Olaf erhalten je eines von fünf zum Referat anstehenden Büchern. Auf wieviel Arten ist eine solche Verteilung möglich?

Eine einfache Lösung der Aufgabe setzt einen Verteilungsprozeß in drei Stufen, entsprechend den drei Personen, an, wobei auf den einzelnen Stufen nacheinander 5, 4, 3 Bücher zur Auswahl stehen. Es wird also über die Personen gestuft; dabei ist unwesentlich, in welcher Reihenfolge die Personen aufgeführt werden. Auf eine hiermit verbundene psychologische Schwierigkeit kommen wir weiter unten zurück.

Ein typischer Fehlansatz besteht in einer wie folgt angelegten Stufung über die Bücher:

1. Stufe: Buch Nr. 1 wird verteilt – 3 mögliche Adressaten;

2. Stufe: Buch Nr. 2 wird verteilt – 2 mögliche Adressaten;

3. Stufe: Buch Nr. 3 wird verteilt – 1 möglicher Adressat.

Für die Bücher Nr. 4 und Nr. 5 sind keine Adressaten mehr da. Der Verteilungsvorgang ist beim 3. Buch beendet. Also gibt es $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Verteilungen. Dieser Ansatz trifft eine Vorentscheidung darüber, welche Bücher überhaupt ausgegeben werden sollen und zählt nur noch diejenigen Verteilungen, die es im Anschluß an diese Vorentscheidung gibt. Der Ansatz kann dadurch korrigiert werden, daß man die Auswahl in eine vorgeschaltete Stufe mit $\binom{5}{3}$ möglichen Ausgängen aufnimmt und so mit $\binom{5}{3} \cdot 3! = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ zum richtigen Ergebnis kommt. Aus der Sicht des Lehrers, der die Referate verteilt, kann diese Version sogar einem natürlichen Handlungsablauf entsprechen.

Es ist angemessen, in der obigen Aufgabe 7 über die Schüler als Subjekt der Handlung zu stufen. Sind jedoch mehr Schüler als Bücher da, und soll eine injektive Verteilung aller Bücher vorgenommen werden, so muß ein dem obigen vergleichbarer unmittelbarer Lösungsansatz eine Stufung über die Bücher als die Objekte der Handlung vornehmen, d.h. *die Stufung „kippt" um* (vgl. auch Aufgabe 8 in Türke [22 (1972)]. Sind genauso viele Bücher wie Schüler da, so kann sowohl über die Schüler wie über die Bücher gestuft werden. Das Subjekt-Objekt-Schema einer Handlung garantiert also allein noch kein Muster für die Stufung. Diese *Subjekt-Objekt-Dichotomie* kann vielmehr die Handhabung der Produktregel erschweren.

Ähnlich verhält es sich mit der *Ding-Platz-Dichotomie*[1], die wir anhand der Aufgaben 8 bis 11 verdeutlichen:

Aufgabe 8: Auf wie viele Arten kann man 5 verschiedene Briefe in 9 Postfächer einsortieren, wenn Mehrfachbelegungen zugelassen sind?

Aufgabe 9: Eine Autonummer besteht aus 3 Buchstaben, gefolgt von 3 Ziffern. Wie viele solche Autonummern gibt es? (Engel [12, S. 36])

1 Wir verweisen auf die Analyse der Handlungen „Legen" und „Belegen" bei Kirsch [19].

Aufgabe 10: Auf wie viele Arten können 8 Türme auf ein Schachbrett gestellt werden, so daß sie sich gegenseitig nicht schlagen können? (Engel [12, S. 33])

Aufgabe 11: Auf wie viele Arten können 3 verschiedene Merkmalplättchen in eine Reihe gelegt werden?

Zur Lösung von Aufgabe 9 kann man über die Plätze auf dem Nummernschild stufen und die Buchstaben und Ziffern variieren. In Aufgabe 8 dagegen werden die Postfächer, also die Plätze, variiert. Ähnlich stuft die von Engel vorgeschlagene erste Lösung von Aufgabe 10 [12, S. 35] über die Türme bzw. Spalten und variiert die Plätze in den Spalten. In Aufgabe 11 kann man sowohl über die Dinge wie über die Plätze stufen. „In manchen Situationen ist auch nicht ohne Willkür entscheidbar, welche der beiden Objektmengen die Menge der Dinge, welche die Menge der Plätze sein soll.“ (Kirsch [19, S. 176]).

Schließlich treten bei der Anwendung der Produktregel auf der Grundlage von Handlungsvorstellungen auch *psychologische Schwierigkeiten* auf. Die Vorgabe von Stufen kann *Scheineinengungen* verschiedener Art bewirken. Der Stufungsprozeß wird gedanklich in der Zeit realisiert; die Stufenreihenfolge[1] kann als Rangfolge (miß-)interpretiert werden; beides mag dazu beitragen, daß in der Vorstellung subjektive *Möglichkeitsbeschränkungen* entstehen können. Läßt man in Aufgabe 7 zum Beispiel die Schüler in der angegebenen Reihenfolge ihre Bücher in Empfang nehmen, so kann leicht der Eindruck entstehen, Klaus, der zuerst wählen darf, sei im Vorteil, folglich sei das Verfahren ungerecht und liefere nicht alle Verteilungen. Ein vollständiges Auflisten aller Möglichkeiten bei Aufgaben mit kleinen Zahlen kann diese Fehlvorstellung ausräumen. Eine ähnliche Einengung liegt vor, wenn die Vorstellung, ein einmal vergebenes Buch sei bereits in festen Händen und stehe nicht mehr zur Verteilung an, den Blick auf die Gesamtheit aller Möglichkeiten verstellt. Diese Schwierigkeiten müssen auch vor dem Hintergrund des *kognitiven Entwicklungsstadiums* der Schüler gesehen werden.

Zum Abbau vieler Schwierigkeiten, insbesondere der genannten Scheineinengung, schlagen wir vor, bei der Arbeit mit der Produktregel verstärkt Codewörter zu verwenden und gegenüber dem Handlungsaspekt den *Codierungsaspekt* zu betonen. Die entscheidende Frage bei Aufgabe 7 lautet dann nicht mehr, wie man sich die Verteilung der Bücher als Vorgang vorstellen muß, um einen für die Anwendung der Produktregel brauchbaren Stufenprozeß zu erhalten. Die Frage lautet nun: Wie kann man alle möglichen Ergebnisse einer solchen Verteilung systematisch *auflisten* und dann *abzählen*?

Die Stufen erhalten hierbei den Charakter von Listenspalten. Was beim handlungsorientierten Zugang die Menge der Teilergebnisse auf einer Stufe war, dem entspricht nun die Menge der möglichen Einträge in einer Spalte der Liste. Das Baumdiagramm selbst wird im Blick darauf zweckmäßigerweise eher als Leitfaden für die Codierung, denn als Handlungsschema interpretiert. Schließlich kann man auch von der Liste abstrahieren und nur noch die Struktur der benötigten Codewörter analysieren.

Die Aufmerksamkeit des Schülers wird bei diesem Zugang verlagert auf das echte technische Problem einer geeigneten Codierung und nicht zentriert auf oft künstlich schemati-

1 Das Aneinandersetzen von Wegstrecken oder das Zusammensetzen von Zahlen ist etwas anderes als das emotional viel stärker besetzte Verteilen von Gegenständen.

sierte Handlungsabläufe, die den natürlichen Vorgehensweisen nicht entsprechen. Dadurch werden die Scheineinengungen des Handlungsaspektes vermieden, ohne daß Handlungsvorstellungen da, wo sie nützlich sind, ganz ausgeschaltet werden müssen. Wie eingangs gezeigt, sind die *Codewörter* ein dem mathematischen Kern der Produktregel nahestehendes Hilfsmittel, das jedoch den Vorteil hat, nach Bedarf für den Übergang zu jeder Repräsentationsebene offen zu sein[1].

3.2. Die Summenregel oder Regel des getrennten Abzählens

Den *mathematischen Hintergrund* dieser Regel bildet das Verfahren, die Mächtigkeit der Vereinigung von zwei disjunkten endlichen Mengen A und B als Summe der einzelnen Mächtigkeiten zu berechnen: $|A \cup B| = |A| + |B|$ falls $A \cap B = \emptyset$. Es ist der einfachste Spezialfall des Prinzips der Inklusion und Exklusion, das eine Formel zur Berechnung der Mächtigkeit beliebiger endlicher Vereinigungsmengen liefert (vgl. Dembowski [11]).

Von der Sache her durchsichtig, ist die Summenregel naiv anwendbar. Jedoch beobachtet man im Unterricht die *Schwierigkeit*, daß sie häufig unreflektiert gebraucht und mit der Produktregel verwechselt wird. Das sei an zwei Beispielaufgaben demonstriert:

Aufgabe 12: Auf wie viele Arten können 4 Mädchen und 4 Jungen sich so in eine Reihe setzen, daß Mädchen und Jungen abwechselnd sitzen?

Aufgabe 13: Abel wohnt in (0|0) und arbeitet in (8|8). Sein Arbeitskollege Kain wohnt in (4|4). Abel fährt jeden Morgen zur Arbeit und nimmt unterwegs Kain mit. Auf wie viele Arten kann er das tun, wenn er keine Umwege fahren will? (Engel [12, S. 41])

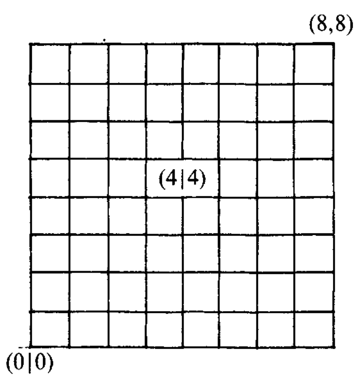

Fig. 1

Ein Schüler errechnet zu Aufgabe 12, daß es 576 Sitzreihen gibt, bei denen ein Junge an erster Stelle sitzt, und eben so viele, bei denen ein Mädchen an erster Stelle sitzt. Er schlägt daraufhin 576^2 als Lösungszahl vor. Jedoch schließen sich beide Sorten von Sitzreihen

1 In diesem Sinne auch von Kirsch [18] empfohlen.

gegenseitig aus. Sie müssen daher getrennt abgezählt und ihre Anzahlen müssen addiert werden. Die von Johnston u.a. [16] verwendete Formulierung „Regel des getrennten Abzählens" ist aus diesem Grunde der Bezeichnung „Summenregel" vorzuziehen, weil erstere einen Hinweis auf die Verwendungssituation der Regel enthält.

Häufiger noch beobachtet man den umgekehrten Fehler, daß Schüler die Summenregel statt der Produktregel verwenden, etwa bei dem folgenden Ansatz zu Aufgabe 13: „Von $(0|0)$ bis $(4|4)$ gibt es $\binom{8}{4}$ Wege, von $(4|4)$ bis $(8|8)$ nochmal so viele Wege; das sind zusammen $\binom{8}{4}+\binom{8}{4}=70+70=140$ Wege." Jedoch handelt es sich hier nicht um getrennt zu zählende Wege, sondern um Etappen, von denen jeweils zwei zu einem vollständigen Weg zusammenzusetzen sind.

Während also die Summenregel sich ausschließende, aber in sich vollständige Fälle zählt, zählt die Produktregel die Möglichkeiten, Teile zu einem Ganzen zusammenzusetzen.

3.3. Das „Prinzip der Schäfer"

Als „principe des bergers" bezeichnet Bourbaki [10] den folgenden

Satz: Seien B und S zwei Mengen mit (endlichen) Kardinalzahlen b und s, und sei f eine Surjektion von B auf S, so daß die Mengen $f^{-1}(y)$ für alle $y \in S$ die Mächtigkeit c haben. Dann gilt:

$$b = s \cdot c. \tag{1}$$

Das Prinzip der Schäfer läßt sich veranschaulichen durch eine dem Volksmund geläufige Anekdote, die zugleich die Namensgebung motiviert[1]: Ein Schäfer versetzt seine Kollegen in Erstaunen, weil er mit ungewöhnlicher Schnelligkeit die Anzahl einer Schafherde überprüfen kann. Nach seinem Erfolgsrezept befragt, erläutert er: „Das ist ganz einfach. Ich zähle die Beine und teile durch vier." Der Schäfer bestimmt also die gesuchte Anzahl s der Schafe mittelbar, indem er ersatzweise die Beine zählt und diese dann in Klassen zu je vier zusammenfaßt. Diese Methode, die in der vorliegenden Situation grotesk umständlich wirkt und damit der Anekdote ihre Komik verleiht, erweist sich in anderen Zusammenhängen als hilfreicher Ausweg.

Nehmen wir den eingangs zitierten Satz genauer unter die Lupe: Vermöge der Abbildung f wird die Menge B in s Äquivalenzklassen je der Mächtigkeit c eingeteilt. Fächert man die Klassen wieder auf in ihre Elemente, so erhält man die Menge B zurück. Die Elemente von B können daher auf zwei Weisen gezählt werden: direkt oder in zwei Stufen, indem nacheinander die Anzahl der Äquivalenzklassen und die Anzahl der Elemente pro Klasse bestimmt werden. Umgekehrt läßt sich natürlich die Anzahl s der Klassen errechnen, wenn b und c bekannt sind. So geschieht es in der Anekdote.

1 Es handelt sich hierbei um eine eigene Interpretation der Verfasser und nicht um ein Urteil darüber, welche Gründe Bourbaki für die Bezeichnung „principe des bergers" hatte.

Faßt man die Elemente von B als Punkte und die Äquivalenzklassen als Blöcke einer einfachen Inzidenzstruktur auf, so erkennt man das Prinzip der Schäfer als Spezialfall des Prinzips der doppelten Abzählung, das für die endliche Geometrie grundlegend ist (vgl. etwa Beutelspacher [5]): Die Inzidenzen einer einfachen endlichen Inzidenzstruktur werden auf zwei Weisen gezählt, und entsprechend wird die Anzahl durch zwei verschiedene Terme dargestellt, aus denen man durch Gleichsetzung eine gesuchte Größe errechnen kann.

In der elementaren Kombinatorik begegnet der Schüler dem Prinzip der Schäfer bei der Berechnung der Binomial- (und Multinomial-)koeffizienten. So kann man die Anzahl N der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge durch zweifache Abzählung aller geordneten Stichproben ohne Zurücklegen vom Umfang k aus n Elementen bestimmen. Stellt man sich die Bildung einer geordneten Stichprobe als k-maliges Ziehen je eines Elementes vor, so ergibt eine Anwendung der Produktregel die Anzahl $n(n-1)\dots(n-k+1) =: (n)_k$. Organisiert man demgegenüber den Vorgang zunächst als Zwei-Stufen-Prozeß, wobei auf der ersten Stufe eine k-elementige Teilmenge gebildet und diese Menge auf der zweiten Stufe angeordnet wird, so erhält man $N \cdot k!$ mögliche Ausgänge. Es muß also die Gleichung

$$N \cdot k! = (n)_k \tag{2}$$

gelten, aus der sich N leicht in der Form

$$N = \frac{(n)_k}{k!} \tag{3}$$

berechnen läßt.

Die Gleichung (2) läßt sich, von links nach rechts gelesen, auf der Sachebene dynamisch interpretieren durch die Auffächerung der N Mengen in die jeweils zugehörigen k! Anordnungen. Dieser Vorgang führt auf die Menge aller k-Stichproben ohne Zurücklegen, deren Anzahl $(n)_k$ bekannt ist. Umgekehrt läßt sich die Gleichung (3), von rechts nach links gelesen, durch die zum Auffächern gegenläufige Bewegung des Identifizierens deuten. Indem man die Anordnung vergißt, faßt man je k! Reihen in der zugrundeliegenden Objektmenge zusammen.

Ähnlich führt eine zweifache Abzählung aller Anordnungen von n Elementen auf die Identität

$$n! = N \cdot k! \cdot (n-k)!\,. \tag{4}$$

Somit läßt sich das Prinzip der Schäfer modifizieren zu einer Strategie, die wir Strategie der *Auffächerung* bzw. *Klassenbildung* (Identifizierung) nennen wollen. Sie konkretisiert sich insbesondere in der *Einführung* bzw. *Rücknahme von künstlichen Unterscheidungen und Anordnungen.* Von Vorteil ist das Einführen von künstlichen Unterscheidungen bei ungeordneten Stichproben mit Wiederholungen[1], z. B. bei der folgenden

1 siehe auch die überzeugende ikonische Darstellung bei Kirsch [18].

Aufgabe 14: Gesucht ist die Anzahl N aller 8-stelligen Zahlen, in denen zweimal die Ziffer 3 und je dreimal die Ziffern 1 und 2 vorkommen.

Man konkretisiert zu jeder Ziffer so viele unterschiedliche Exemplare, wie ihre Vielfachheit angibt, so daß man acht verschiedene Ziffern erhält, die bekanntlich auf 8! Weisen anzuordnen sind. Nimmt man nun in umgekehrter Richtung die zuvor getroffenen Unterscheidungen für jede der drei Ziffern wieder zurück, so entfallen auch die hierdurch bedingten zusätzlichen Anordnungsmöglichkeiten. Durch eine dreifache Anwendung des Prinzips der Schäfer gelangt man dann zur Lösung $\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!}$.

Zusammenfassend halten wir fest: Man kann die Gleichung (1) als Protokoll von drei verschiedenen Handlungen deuten: als zweifache Abzählung, als Auffächerung oder als Klassenbildung. Für die Beispiele gilt entsprechendes. Die Deutungen ergänzen sich gegenseitig. Welche Sichtweise zur ersten Erarbeitung einer Lösung die geeignete ist, hängt vom jeweiligen Unterrichtsgang ab. Der Lehrer sollte alle verfügbar haben und die nicht verwendeten in der Phase der Sicherung einsetzen.

Das Verfahren der mittelbaren Anzahlbestimmung, das wir inhaltlich als Strategie der Auffächerung bzw. Identifizierung von Möglichkeiten interpretiert haben, führt auf Umkehraufgaben zur Produktregel. Es scheint daher ratsam, solche Umkehrungen im Unterricht frühzeitig anzubahnen, *ohne* daß der *Terminus „Quotientenregel"*, den man in Unterrichtswerken gelegentlich findet, *verwendet werden müßte.*

4. Das Beziehungsgeflecht der Grundfähigkeiten

Damit die grundlegenden Prinzipien und Strategien sich wirksam so bündeln, daß sie den Schüler zur Lösung verschiedenartiger Probleme befähigen, müssen sie in sich beweglich werden und in ihren wechselseitigen Beziehungen klar sein. Sie müssen also im Sinne des operativen Prinzips unterrichtet werden.

4.1. Zur Umkehrbarkeit von Gedankengängen

Regeln sollten nicht immer nur in einer Richtung verwendet werden.

Aufgabe 15: Ralf hat einen komplizierten Heimweg. Er muß zunächst eine der Straßenbahnlinien 3, 9, 11 benutzen, am Bahnhof in die S-Bahn oder einen Eilzug umsteigen und die letzte Teilstrecke schließlich mit einer der Buslinien A, B, C zurücklegen. Wie viele Möglichkeiten hat Ralf, seine Heimfahrt zusammenzustellen? (nach Athen-Griesel [2, S. 68]).

Diese Aufgabe ist mit einer elementaren Anwendung der Produktregel zu beantworten. Die Situation weist eine natürliche Stufung auf, so daß nicht erst ein künstlicher Stufungsprozeß geschaffen werden muß. Eine mögliche Anschlußfrage lautet: Wie viele Möglichkeiten hat Ralf noch, wenn er vom Bahnhof aus immer die S-Bahn benutzt? Sie kann durch eine erneute Anwendung der Produktregel gelöst werden, wobei die Anzahl der Ergebnisse auf der 2. Stufe 1 ist. Es bietet sich aber auch eine Umkehrüberlegung folgender Art an: Von den 18 Möglichkeiten insgesamt fallen bei der Festlegung auf die S-Bahn je 2 zusammen, so daß nunmehr 9 Möglichkeiten bleiben.

Zum Auffächern, das der direkten Produktregelanwendung entspricht, gehört umgekehrt das Identifizieren. Da diese Verwendungsmöglichkeiten der Produktregel später in kompliziertere Strategien eingebunden werden, sollte man sie frühzeitig behandeln (vgl. 3.3).

Sinnvoll ist auch eine Umkehrung der Richtung Aufgabe – Ergebnis. Oft ist es hilfreich, wenn Schüler nach einem fehlerhaften Ansatz die gestellte Aufgabe selbst so abwandeln, daß der Ansatz richtig wird. Eine geeignete Frage für diesen Fall lautet also: Wie hätte die Aufgabe gestellt werden müssen, damit das vorgeschlagene Ergebnis stimmt? In manchen Fällen kann sich hieran eine generelle Variation der Problemstellung anschließen: Variiere die Aufgabe so, daß das Ergebnis n^k, $(n)_k$, $\binom{n}{k}$ lautet. Solche Übungen dienen der Sicherheit im Erkennen einer passenden Lösungsstrategie und verhindern blindes Einsetzen in Formeln. Zum Beispiel ist Aufgabe 6 offen für die Betrachtung verschiedener Zusatzbedingungen (die Kaninchen sind unterscheidbar – nicht unterscheidbar, desgl. die Käfige, kein Käfig soll leer bleiben ... vgl. Engel [12, S. 43]).

4.2. Die Variation von Lösungswegen

In 3.1 wurde bereits hingewiesen auf Möglichkeiten, bei der Anwendung der Produktregel die Stufungen unterschiedlich anzusetzen. Eine Ausschöpfung aller Möglichkeiten gehört zu den allgemeinen Lernzielen des Mathematikunterrichts. Da die verschiedene Organisation von Stufenfolgen beim Prinzip der zweifachen Abzählung zur Methode wird, sollte sie auch aus fachlichen Gründen frühzeitig geübt werden. Wie eine kombinatorische Aufgabe sowohl durch direkte Anwendung einer Regel wie auch durch eine Umkehrüberlegung gelöst werden kann, wurde in 4.1 gezeigt.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang noch die Möglichkeit, die Summenregel durch eine geschickte Anwendung der Produktregel zu umgehen, sofern die durch die Summenregel abzuzählenden Ergebnismengen gleichmächtig sind. Wir demonstrieren sie am Beispiel der folgenden

Aufgabe 16: Von drei Insassen eines Autos haben nur zwei einen Führerschein. Auf wie viele Arten können sie sich für eine Urlaubsfahrt auf die vier Plätze verteilen?

Der erste Lösungsweg benutzt sowohl die Summenregel wie auch die Produktregel. Wir benennen Personen A, B, C wobei A und B die Fahrtüchtigen seien. Dann haben wir

Fall 1: A fährt.
Fall 2: B fährt.

Innerhalb von Fall 1 bestimmen wir die Anzahl der Besetzungsmöglichkeiten mit Hilfe der Produktregel:

1. Stufe: B wählt einen der 3 freien Plätze,

2. Stufe: C wählt einen der restlichen 2 Plätze.

Nach der Produktregel ergeben sich somit je 6 Möglichkeiten für Fall 1 und Fall 2. Das sind nach der Summenregel insgesamt 12 Möglichkeiten. Ein schnellerer Weg integriert diese Gedankengänge in eine einmalige Anwendung der Produktregel:

1. Stufe: Entscheidung, wer fährt: 2 Möglichkeiten,

2. Stufe: Besetzung einer der drei freien Plätze durch die im Alphabet erste nicht fahrende Person: 3 Möglichkeiten,

3. Stufe: Besetzung einer der zwei verbleibenden Plätze durch die letzte Person: 2 Möglichkeiten.

Nach der Produktregel erhält man somit 12 Möglichkeiten insgesamt.

Auf diese Weise kann man meist eine Falluntersuchung in einen Stufungsprozeß einarbeiten. Man nimmt dabei in Kauf, daß auf den einzelnen Stufen Handlungen unterschiedlichen Typs vollzogen werden.

Als weiteres Beispiel mit reichhaltigen „Interpretationsdivergenzen" zitieren wir aus Perko [22] die folgende

Aufgabe 17: Aus 5 Ehepaaren werden 4 Personen ausgewählt. In wieviel 4-Gruppen ist kein Ehepaar.

Wir überlassen dem Leser die Rekonstruktion der Lösungswege, die zum Ergebnis $5 \cdot 24$ oder $\frac{10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4}{4!}$ oder $\binom{10}{4} - \binom{5}{2} - 5\left(\binom{8}{2} - 4\right)$ oder $\sum_i \binom{5}{i}\binom{5-i}{4-i}$ führen.

5. Die Isomorphie in der Kombinatorik als Problem

Das Isomorphieproblem ist in der klassischen Behandlung der Kombinatorik beim Weg über die Erarbeitung der Grundaufgaben bereits explizit vorgezeichnet, nämlich in der von Aufgabe zu Aufgabe notwendigen Zuweisung zu einer der Grundfiguren. Zur Verfügung stehen hierfür standardisierte Aufgabentypen: Ziehen von k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln – mit Wiederholung/ohne Wiederholung/als geordnete Stichprobe/als ungeordnete Stichprobe, bzw. das duale Modell des Verteilens von k Kugeln auf n Zellen – ohne Ausschlußprinzip (Doppelbelegung)/mit Ausschlußprinzip/als unterscheidbare Kugeln/als ununterscheidbare Kugeln. Wie in 2. aufgezeigt worden ist, wird jeder Ansatz zur Lösung einer Aufgabe sich sofort mit dem Klassifizierungsproblem auseinanderzusetzen haben, also mit der Frage nach einer isomorphen standardisierten Aufgabe obigen Typs.

Das Mühen um das Erkennen von isomorphen Strukturen soll als Lernziel innerhalb der Kombinatorik nicht bestritten werden, gleichwohl – und das sollte bedacht werden – handelt es sich hierbei um ein recht anspruchsvolles Ziel. Schließlich ist das Hinarbeiten auf eine Standardisierung von Fragestellungen in allen Bereichen der Mathematik anzutreffen, allerdings ergeben sich vielfach die Grundfiguren erst am Ende eines Klassifizierungsprozesses. Aufgabensammlungen zur Kombinatorik, in denen intern die Aufgaben bereits nach den Grundtypen sortiert sind (z. B. Lipschutz [21] und stellenweise auch bei Engel [12]) sind unter diesen Gesichtspunkten nur bedingt hilfreich.

Hinzu kommt, daß die *syntaktische Isomorphie* von kombinatorischen Aufgabenstellungen keineswegs die *mathematische Isomorphie* impliziert. Man vergleiche dazu:

Aufgabe 18: Auf wie viele Arten können 12 Studenten eine Klausur schreiben, wenn 3 verschiedene Themen zur Verfügung stehen und je 4 Studenten das gleiche Thema bearbeiten? (Lipschutz [21, S. 30]).

Aufgabe 19: Wieviel Möglichkeiten gibt es, 12 Sportler in 3 Mannschaften A_1, A_2 und A_3 mit je 4 Spielern aufzuteilen? (Lipschutz [21, S. 30]).

Während es im zweiten Fall nur um die Bildung von drei Vierergruppen geht (Klasseneinteilung), ist im ersten Fall auch die Zuordnung der Gruppen zu den verschiedenen Themen (aus der Sicht des Prüflings) nicht unerheblich.

Nach unseren Beobachtungen müssen die Schwierigkeiten beim Erkennen von isomorphen Aufgabenstellungen bereits in unvermutet elementarem Kontext, der von den Grundaufgaben völlig ignoriert wird, bewältigt werden; z. B. ist n-maliges Wüfeln mit einem Würfel bei fortlaufendem Protokollieren gleichwertig einem Wurf mit n unterscheidbaren Wüfeln. Auch wird die paradigmatische Aufgabenkette

Aufgabe 20[1]*:*

a) In einem Zimmer gibt es 8 Lampen, die unabhängig voneinander ein- und ausgeschaltet werden können. Wie viele Beleuchtungsarten gibt es?

b) Ich habe 8 Münzen von verschiedenem Wert. Auf wieviel Arten kann ich sie auf zwei Taschen verteilen?

c) Auf wieviel Arten kann man davon Trinkgeld geben? (Engel [12, S. 36])

von Schülern vielfach erst nach dem Vergleich der übereinstimmenden Ergebnisse kritisch analysiert und danach im Hinblick auf die Isomorphie erschlossen; gleiches gilt für das von Freudenthal [13, S. 531] des öfteren zitierte Geburtstagsproblem.

Blockierend in bezug auf das Isomorphieproblem wirkt die in den Grundaufgaben ausgesprochene Unterscheidung: geordnet/ungeordnet; es entsteht der falsche Eindruck, als könnten niemals geordnete Strukturen zu ungeordneten Strukturen isomorph sein. Nun begründet aber gerade die Produktregel eine Präferenz für geordnete Strukturen; ihr universeller Einsatz wäre nur bedingt verständlich, wenn es solche Isomorphiebeziehungen nicht gäbe. Die bekannten Beispiele für ein korrespondieren scheinbar ungeordneter Objekte zu Ordnungsstrukturen sind: Auswahl einer k-Menge aus einer n-Menge/0–1-Folgen der Länge n mit k Einträgen „1"/links-rechts-Wege in einem Gitternetz; Repräsentieren von Umstellklassen (Teilmengen) durch isotone (streng isotone) Wörter. Man beachte, daß die vielfach nicht unmittelbar verfügbare Ordnungsstruktur von Mengen (Mengen versus n-tupel!) zumeist durch die Unterscheidbarkeit der Elemente geliefert wird, weil diese eine Numerierung und somit auch eine Anordnung ermöglicht. Diese Numerierung ist oft das Ergebnis eines Willküraktes, dessen „o. B. d. A." eingesehen werden muß.

1 Nach einem Hinweis von Herrn Kirsch sollte man in b) von zwei „unterscheidbaren" Taschen sprechen. Die Frage c) nach den verschiedenen „Arten" ist nicht gleichzusetzen der Frage nach den „verschiedenen Werten".

6. Zum Aufgabenproblem

Das Mühen um die Bereitstellung eines vielschichtigen, fachlich angemessenen, intellektuell ansprechenden und zugleich wirklichkeitsnahen Aufgabenmaterials ist verständlicherweise kein spezifisches Problem einer Didaktik der Kombinatorik. Leider erhält der Lehrende – ähnlich wie bei manchen anderen Themenkreisen – durch die derzeit vorliegenden Lehrbücher vielfach nur bescheidene Anregungen.

Was sollen die Aufgaben im Kombinatorik-Unterricht grundsätzlich leisten (Lernzielaspekt)? Ein *maßgebliches allgemeines Lernziel* sehen wir insbesondere darin, daß durch die Erfahrung von Mathematisierungsprozessen die Fähigkeit zur Modellbildung im allgemeinen (vgl. auch Kap. 3) geschult wird. Darüberhinaus versteht es sich von selbst, daß auch eine bewegliche Anwendung der grundlegenden Prinzipien angestrebt wird (*sachspezifisches Lernziel*). Ein solches Ziel wird sicher nicht erreicht, wenn die Aufgaben bereits vorher (vgl. Lipschutz [21]) typisiert und dem Lernenden nach Gruppen geordnet präsentiert werden (vgl. 3.1).

Inwieweit tragen die gängigen Unterrichtswerke diesen Zielen Rechnung? Welche Aufgabentypen[1] findet man in der Literatur, und welchen Situation sind sie entnommen (*phänomenologischer Aspekt*)? Einen weiteren Raum nehmen die Aufgaben ein, die *Glücksspielsituationen* beinhalten (Lotto, Toto, Skat, Partyspiele, Urnenaufgaben). Nicht zu Unrecht muß daher die Wahrscheinlichkeitsrechnung gegen das Image ankämpfen, eine Würfelbudenmathematik zu sein. Manche der traditionellen Urnenaufgaben werden mittlerweile als Aufgaben zur *Qualitätskontrolle* umgeschrieben:

Aufgabe 21: In einer Lieferung von 100 Glühbirnen befinden sich 3 defekte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß a) unter 4, b) unter 6 zufällig ausgewählten Glühbirnen mindestens eine defekte ist? (Bosch/Wolf [8, S. 53])

Daß in der Realität bei Warenproben zur Qualitätskontrolle die Aufgabenstellung gerade entgegengesetzt lautet, daß also von der Stichprobe auf die Gesamtheit geschlossen wird, sei nur am Rande bemerkt. Immerhin ist diese Aufgabe sinnvoll, im Gegensatz zu den drei folgenden.

Zur Genüge bekannt sind auch die in keinem Lehrbuch fehlenden *Turnierpläne* oder das Abzählen von *Sitzordnungen* (lineare Anordnungen, Anordnungen am runden Tisch) unter Nebenbedingungen (z. B. abwechselnde Geschlechterverteilung).

Zahlreiche Aufgaben beschäftigen sich mit *Entscheidungsfindungen* durch ein *Losverfahren.* Makaber mutet die folgende fast triviale Aufgabe an:

Aufgabe 22: 3 Frauen und 1 Mann sollen am Blinddarm operiert werden. Die Reihenfolge wird ausgelost. A sei das Ereignis, daß der Mann als zweiter operiert wird. Berechnen Sie $P(A)$. (Bosch/Wolff [9, S. 39])

1 Zwar wird in den meisten folgenden Aufgaben nach bestimmten Wahrscheinlichkeiten gefragt; da das Wahrscheinlichkeitsmodell zweifelsohne laplacesch angenommen werden darf, zählen wir die Aufgaben im umfassenden Sinne zur Kombinatorik.

Manchmal wird dieses Losverfahren in der Willkür einer individuellen Entscheidung gesehen:

Aufgabe 23: 10 Reisende steigen in einen Zug mit 12 Wagen ein. Wir nehmen an, daß die Auswahl des Wagens jeweils zufällig erfolgt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß

a) alle Reisenden in denselben Wagen einsteigen,
b) jeder Reisende in einen anderen Wagen einsteigt
c) der 12. Wagen nicht besetzt wird?
(Berg/Horn/Schmidt [4, S. 49])

Es erscheint hier der Hinweis angebracht, daß ein D-Zug mit 12 Wagen immerhin eine Länge von 320 m am Bahnsteig beansprucht und daß man in der Aufgabe manchem Reisenden ungeachtet seines Gepäcks 100 m-Sprints zumutet. Die Aufgabe

Aufgabe 24: Auf wieviel Weisen kann ein Trainer die 11 Spieler einer Fußballmannschaft umgruppieren? (Bangen [3, S. 23])

wird – zumindest für Fußballkenner – eher zum Beleg für die Realitätsferne denn für die Nützlichkeit der Mathematik.

In einer weiteren Gruppe von Aufgaben geht es um das *Abzählen von Wörtern* über einem Alphabet (Ziffernfolgen, KFZ-Kennzeichen, Codes).

Der oben angesprochene phänomenologische Aspekt hat, wie wohl deutlich geworden ist, auch eine *inhaltliche Dimension.*

Ein Makel vieler Aufgaben besteht darin, daß sie nur scheinbar wirklichkeitsnah, im Grunde genommen aber *unrealistisch* sind. Nicht geleugnet werden soll hier die Berechtigung diverser Denksportaufgaben, die sachspezifischen Lernzielen Rechnung tragen können (vgl. z. B. Engel [12, Aufgabe 4, S. 33]). Ob aber über eingekleidete Aufgaben dem anspruchsvollen allgemeinen Lernziel, durch Modellbildung den Mathematisierungsaspekt herauszuarbeiten, genüge getan werden kann, ist zweifelhaft. Die Einkleidung soll – so hofft man – motivierend wirken. Eine allzu künstliche Einkleidung dürfte dagegen zu einer Entfremdung zwischen dem Schüler und dem mathematischen Gegenstand führen und trägt einmal mehr zu jenem Image von Mathematik als einer Wissenschaft im Elfenbeinturm bei.

Es ist für uns offen, inwieweit gegebenenfalls durch geringfügige Textveränderungen Aufgaben annehmbar werden. Man vergleiche etwa

Aufgabe 25: Drei Herren verlassen vorzeitig eine Gesellschaft und greifen in der verdunkelten Garderobe auf gut Glück in den Schirmständer, in welchem sich 10 Schirme befinden, darunter auch ihre eigenen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß jeder durch Zufall gerade seinen eigenen Schirm erwischt? (Ineichen [14, S. 57])

mit der sachlich verwandten Aufgabe

Aufgabe 26: Auf einer Party müssen die 3 erschienenen Autofahrer ihre Autoschlüssel abgeben. Die Schlüssel werden in eine Schachtel gelegt und gut durchgemischt. Am Ende der Party darf jeder Autofahrer aus dieser Schachtel „blind" einen Schlüssel ziehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß alle ihren richtigen Schlüssel bekommen? (nach Berg/Horn/Schmidt [4, S. 49])

Allerdings eröffnen sich bei der Besprechung solcher „gemachten“ Aufgaben auch manchmal positive Möglichkeiten – sie zu nutzen ist Sache des Lehrers – etwa wenn im Zusammenhang mit Aufgabe 27 die Voraussetzung der Gleichwahrscheinlichkeit in Frage gestellt wird:

Aufgabe 27: In einem Aufzug sind 5 Gäste. Der Aufzug bleibt in 7 Stockwerken stehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß alle Gäste den Aufzug in verschiedenen Stockwerken verlassen, wenn man (sicher nicht ganz realistisch) davon ausgeht, daß das Aussteigen zufällig erfolgt? (Berg/Horn/Schmidt [4, S. 49])

Insofern kann die eine oder andere unrealistische Aufgabe zur Aufdeckung falscher Denkansätze in der Wahrscheinlichkeitsrechnung beitragen.

Anschrift der Verfasser: Privatdozent Dr. Lisa Hefendehl-Hebeker/Professor Dr. Günter Törner, Universität-Gesamthochschule-Duisburg, FB 11/Mathematik, Lotharstraße 65, 4100 Duisburg 1

Eingangsdatum: 4.6.1983

Literatur

[1] Althoff, H. u. F.-W. Kosswig: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Düsseldorf, Braunschweig: Vieweg 1975
[2] Athen, H. u. H. Griesel: Mathematik heute, Grundkurs Stochastik. Hannover: Schroedel 1979
[3] Bangen, G.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik. Frankfurt: Diesterweg Salle 1978
[4] Berg, D., Horn, R. u. G. Schmidt: Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung G, Andelfinger Mathematik S-2. Freiburg: Herder 1980
[5] Beutelspacher, A.: Einführung in die endliche Geometrie I, Blockpläne. Zürich: Bibliographisches Institut 1982
[6] Borges, R.: Ein Vorschlag zur Normung der Namen der kombinatorischen Grundbegriffe in DIN 1302. PM 21 (1979), S. 43–45
[7] Borges, R.: Die Begriffe der Kombinatorik in der Neuausgabe von DIN 1302. In: PM 23 (1981), S. 148–151
[8] Bosch, K. u. H. Wolff: Leistungskurs – Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Braunschweig: Westermann 1978
[9] Bosch, K. u. H. Wolff: Grundkurs – Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Braunschweig: Westermann 1978
[10] Bourbaki, N.: Eléments de Mathématique, Livre I, Théorie des Ensembles; Chap. 3. Paris: Hermann 1963
[11] Dembowski, P.: Finite Geometries. Berlin/Heidelberg/New York: Springer 1968
[12] Engel, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Band 1. Stuttgart: Klett 1973
[13] Freudenthal, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe, Band 2. Stuttgart: Klett 1973
[14] Ineichen, R.: Einführung in die elementare Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Luzern: Räber-Verlag 1965
[15] Jeger. M.: Einführung in die Kombinatorik. Band 1. Stuttgart: Klett 1973
[16] Johnston, J. B., Price, G. B. u. F. S. van Vleck: Mengen, Funktionen und Wahrscheinlichkeit. Band 2. München, Wien: Oldenbourg 1974
[17] Kapur, J. N.: Combinatorial Analysis and School Mathematics. In: Educ. Studies in Mathem. 3 (1970). S. 111–127
[18] Kirsch, A.: Eine moderne und einprägsame Fassung der kombinatorischen Grundaufgaben. DdM 1 (1973). Heft 2, S. 113–130

[19] Kirsch, A.: Über die „enaktive“ Repräsentation von Abbildungen, insbesondere Permutationen. DdM 5 (1977), Heft 3, S. 169–194
[20] Kütting, H.: Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Freiburg: Herder 1981
[21] Lipschutz, S.: Wahrscheinlichkeitsrechnung, Theorie und Anwendung. Reihe: Schaum's Outlines. Düsseldorf: Mc Graw Hill Inc. 1976
[22] Perko, R.: Bemerkungen zur marginalen Rolle der elementaren Kombinatorik in der Realität des AHS-Unterrichts. In: Stochastik im Schulunterricht – Beiträge zum 3. internationalen Symposium für Didaktik der Mathematik (Hrsg.: Dörfler, W.; Fischer, R.) Wien: Hölder-Pichler-Tempsky 1980, S. 141–154
[23] Türke, W.: Welche, wie viele Möglichkeiten gibt es? Teile 1–3. alpha 5 (1971), S. 128–129; alpha 6 (1972), S. 32–33; alpha 6 (1972), S. 57–58
[24] Türke, W.: Kombinatorik in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft. Teile 1–3. MiS 13 (1975), S. 524–530; MiS 16 (1978), S. 420–430; MiS 16 (1978), S. 680–690