Günter TÖRNER, Duisburg

Problemlösen in der Sekundarstufe I - Bericht über eine Testreihe -

Nach Polya versteht man unter Problemlösen *[...], die unbekannten Wege zu einem bekannten Ziel zu finden. Wenn die bloße Existenz des Zieles nicht sofort die Wege dorthin offenlegt, wenn wir also die Wege suchen und uns dabei sorgfältig rückversichern müssen, daß wir das genannte Ziel auch wirklich erreichen, dann müssen wir ein Problem lösen.* Insofern ist Problemlösen eine immer wiederkehrende Aufgabe des Mathematikunterrichts auf allen Stufen, ohne daß jedoch der Schüler mit sich anbietenden Hilfsmittel allerorts vertraut gemacht wird. Zwar sprechen Lehrpläne im allgemeinen Problemlösen an, zumeist irgendwo in der Präambel, bleiben dann vielfach, wenn es um die konkrete Umsetzung geht, unverbindlich und appellieren an die Verantwortung und den Ideenreichtum des Lehrers. Stellvertretend für andere Lehrpläne zitieren wir aus den NRW-Richtlinien für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I:

> **2.4 Techniken mathematischen Arbeitens** [...] Das kann zunächst auf Denkanstöße des Lehrers hin erfolgen, ohne daß den Schülern bewußt zu werden braucht, daß sie ein über den Einzelfall hinausweisendes Verfahren anwenden. Spätestens in den Klassen 9 und Klassen 10 sollten den Schülern einige dieser Techniken auch bewußt gemacht werden. Es ist hier insbesondere an folgende allgemeine Arbeitsmethoden gedacht: [...] Heuristische Techniken: Aufstellen von Vermutungen durch Verallgemeinerung oder Analogiebildung; planmäßige Untersuchung von Spezialfällen zur Prüfung einer Vermutung; Entwicklung einer Lösungsmethode durch Umformulierung oder Umstrukturierung [...]

Bemerkenswerte Ausnahme sind zumindest die 1987 revidierten Lehrpläne für die Klassen 1-8 in British Columbia, Canada (B.C.), in denen Problemlösen als eigenständiger Themenkreis mit 10% der Unterrichtszeit obligatorisch festgeschrieben ist.

Es stellt sich allerdings die grundsätzliche Frage, ob Problemlösekompetenz im Mathematikunterricht gleichsam als Transfer umfangreichen 'Aufgabenrechnens' erworben werden kann oder im Sinne der Polya'schen Stufen geschult werden muß. Vor diesem Hintergrund wurden im Mai 1988 in Zusammenarbeit mit Prof. Szetela (Vancouver, B.C.) Tests in drei Klassen der Alterstufe 5 - 6 (Hauptschule, Realschule, Gymnasium) durchgeführt, die bereits in Canada und Polen erprobt worden waren [2]. Bei diesen schnitten lokal selbst Gymnasiasten eher schlechter ab als durchschnittliche 'High school students (Grade 5)' aus B.C., die in Problemlösen unterwiesen waren. Da diese Tests aufgrund der kleinen Stichprobe nur bedingt statistisch aussagekräftig sind, wurde im September 1988 ein vom Kultusministerium genehmigter 'Haupttest' in der Klasse 6 von zwei Gymnasien mit insgesamt 117 Schülern (4 Klassen) durchgeführt, der die Problemlösekompetenz zum Untersuchungsgegenstand hatte und eine Fülle an Beobachtungen und Material zu Tage förderte.. Mehr durch Zufall ergab sich, daß unter den Klassen jeweils zwei 'Latein-' bzw. zwei 'Englisch-'Klassen waren. Gleichsam außer Konkurrenz lief ein inoffizieller Test mit zwei Klassen 5 (47 Schüler insgesamt) in einer Gesamtschule.

1. Die Testaufgaben

Test 1

1.1 In einem Obstgarten befinden sich 32 Reihen mit Kirschbäumen und 14 Reihen mit Apfelbäumen. In jeder Reihe stehen jeweils 26 Bäume. Ein Kirschbaum erbringt rund 90 kg Früchte. Wieviel kg Kirschen können im Obstgarten geerntet werden?

1.2 Innerhalb von fünf Tagen fing Rosa 60 Fische. Sie fing einige am ersten Tag. Danach fing sie von Tag zu Tag jeweils 3 Fische mehr als am Vortag. Wieviele Fische hat sie am ersten Tag gefangen? Gib eine Antwort auf die gleiche Frage, wenn innerhalb der gleichen Zeit sogar 90 Fische gefangen worden wären!

1.3 Die Zahlen 77, 444 , 6666, 99999 bestehen ausschließlich aus Wiederholung ein und derselben Ziffer. Wieviele Zahlen dieser Form gibt es zwischen 1 und 1000? Beantworte die gleiche Frage, wenn Zahlen zwischen 10 und 100 000 zugelassen sind.

1.4 Weiter unten siehst eine Kette mit schwarzen Perlen und eine Kette mit weißen Perlen:

s-s-s-s-s-s Preis der Kette 30 Pf. w-w-w-w Preis der Kette 40 Pf.

Was kostet die folgende Kette, die aus weißen und schwarzen Perlen besteht?

w-s-w-s-w-s-w-s-w-s-w

1.5 Kleine Bonbons kosten jeweils 2 Pfennige, große Bonbons jeweils 5 Pfennige. Theresa kauft 4 Bonbons. Wieviele verschiedene Geldbeträge könnte Theresa ausgegeben haben?

1.6 Stelle Dir vor, Du müßtest alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1000 aufschreiben! Gib eine sinnvolle Schätzung an, wie lange es dauern würde. Wichtig ist, daß Du uns Deine Gedanken erklärst und Deine Rechnung verständlich wird.

Test 2

2.1 Ein Jumbo (Boeing 747) flog fünf Stunden. Die Durchschnittsgeschwindigkeit betrug 820 km pro Stunde. Für jeden Flugkilometer benötigen die Motoren 12 l Treibstoff. Wieviel Liter Treibstoff wurden insgesamt verbraucht? Wieviel Benzin hätte Dein Vater mit seinem Wagen benötigt, wenn die gleiche Strecke mit dem Auto zu fahren gewesen wäre. Dabei kannst Du den Verbrauch mit jeweils 10 Liter auf 100 km ansetzen.

2.2 In einer Obstschale befinden sich Äpfel und Birnen, insgesamt 10 an der Zahl. Jeder Apfel kostet 10 Pfennige, Birnen jeweils 20 Pfennige. Insgesamt haben die Früchte 140 Pfennige gekostet. Wieviele Äpfel sind in der Obstschale?

2.3 Ein Kaufmann hat einen großen Vorrat an 2-kg- und 5-kg-Zucker-Tüten. Er möchte eine Bestellung über 40 kg Zucker erledigen? Schreibe alle Möglichkeiten auf, wieviele sind es? Wieviele Zusammenstellmöglichkeiten wären es, wenn 44 kg Zucker zu liefern gewesen wären?

2.4 Die Perlen einer Kette sind derart aufgereiht, daß die größte in der Mitte und die kleinsten Perlen am Rande liegen. Die Perlen werden größer und teurer jeweils zum Mittelpunkt hin. So kosten die kleinen an den Enden jeweils DM 1.-, die danebenliegenden schon jeweils DM 2.-, die jeweils dritte bereits DM 3.- usw. Die nachfolgende Zeichnung zeigt Dir die jeweiligen Preise einer Kette mit 9 Perlen.

1	-	2	-	3	-	4	-	5	-	4	-	3	-	2	-	1

Wieviel kostet eine Kette mit 25 Perlen?

2. Zur Auswertung

Da das vorliegende Material äußerst umfangreich ist, eröffnen sich zahlreiche Möglichkeiten, über diverse Analysen zu referieren, etwa:

- Aufgabe für Aufgabe könnten die Fehlermuster dargestellt und analysiert werden.
- Es wäre über die Konzeption der Aufgaben wie auch über die Zusammenstellung der Aufgaben in Test 1 bzw. Test 2 reflektieren. Da allerdings für diese Aufgaben hinreichend viele Informationen aus Canada vorliegen, wurden bewußt die Aufgaben nicht zu Disposition gestellt.
- Man könnte der beobachteten hochsignifikanten Leistungsdifferenz zwischen Latein- und Englisch-Klassen bei Test 1 nachgehen, Fragen stellen und Antworten suchen. Diese Leistungsdifferenz ist allerdings nicht in gleicher Weise stark ausgeprägt bei Test 2. Warum?
- Es wäre lohnend, die Frage der Bewertung von Problemlösekompetenz zu diskutieren (globaler oder stufige Benotung) [3].

3. Beobachtungen und Folgerungen

Im folgenden formulieren wir einige Beobachtungen beim Auswerten der Tests:

Schüler der Klasse 6 (Gymnasium) bedienen sich beim Aufgabenlösen in einem als offen gesehenen Problemkontext nur vereinzelt Versuchs- und Irrtumsstrategien. Solche Vorgehensweisen müssen aber als mögliche, vielfach sinnvolle und mathematisch zulässige Heuristiken angesehen werden und mithin dem Schüler aufgezeigt werden. Bewußte Probierlösungen sind nicht von vorneherein abzulehnen, im Gegenteil oftmals effektiv und fachlich voll vertretbar. (1. Feststellung)

Als besonderer Beleg kann hier die Aufgabe 1.2 dienen. Da in Klasse 6 die (relativ umständliche) algebraische Lösung noch unbekannt ist, bietet sich eine Versuchsstrategie an. Allerdings kann nur bei lediglich 8 Schüler (von 59 Schülern) (13,5 %) mehr oder weniger deutlich nachgewiesen haben, daß sie sich dieser Strategie bedient haben - und Erfolg hatten. Diese Aufgabe 1.2 ist überdies ein Musterbeispiel dafür, daß es die eine Lösung nicht geben muß. Gleiches gilt auch für Aufgabe 1.6. Eine solche Interpretation würde die beobachtete 'Zaghaftigkeit' diverser Lösungsversuche dort erklären.

Sowohl Aufgabe 1.5 als auch 2.2 und 2.3 erfordern elementare Abzähltechniken, sind also im weitestgehenden Sinne der aufzählenden wie der abzählenden Kombinatorik zuzurechnen. Wie die Fehleranalyse zeigt, muß hier ein erhebliches Defizit an grundlegenden kombinatorischen Heuristiken festgestellt werden. Wir formulieren daher:

Kombinatorische Überlegungen werden in den Unterrichtsplänen der Klassen 5 und 6 nur stiefmütterlich angesprochen, selbst wenn man sich auf kombinatorisches Abzählen und Auflisten beschränkt. Ein verstärkter Einbezug von elementarer Kombinatorik ist nicht nur fachlich begründbar.

Durch die Beziehungshaltigkeit des Themenfeldes Kombinatorik kann das Fachgebiet Kombinatorik wesentlich zur Angleichung der unterschiedlichen Fachvoraussetzungen bei den Schülern zu Beginn der Klasse 5 beitragen. Überdies eignet sich das Feld der Kombinatorik par excellence für das Exemplifizieren von Heuristiken. (2. Feststellung)

So stammen viele Beispiele von Problemlöseaufgaben aus der Kombinatorik. Nebenbei bemerkt ist Polya's letztes Buch eine Einführung in die Kombinatorik [1].

Aufgabe 1.5 erscheint auf den ersten Blick als völlig unproblematische, einfache Übung im Auflisten kombinatorischer Fallunterscheidungen zu sein. Lediglich 5 von 59 Schülern wählen die als kombinatorische systematische zu bezeichnende Heuristik, der Reihe nach z.B. über die Anzahl der kleinen Bonbons zu stufen, während die Mehrzahl eine ad-hoc Strategie favorisiert: Randfälle, symmetrischer Mittelfall behandeln und evtl. Restfälle. Während sämtliche Bearbeiter auf dem 'kombinatorisch systematischen' Lösungsweg das richtige Ergebnis erhalten, ist die ad-hoc Strategie erheblich fehleranfälliger. Zusätzlich lassen sich bei mehr als 50% Inkosistenzen in der Notation der Reihenfolge: 2 Pf.-Bonbon, 5 Pf.-Bonbon beobachten.

Überdies belegen Aufgabe 1.5 und Aufgabe 2.3 die folgenden Schwierigkeiten:

Viele der in den Tests beobachteten Gymnasialschülern weisen noch ein erhebliches Defizit im Niederschreiben von mathematischen Sachverhalten auf, z.B. die nicht vorhandene Kompetenz, sich einfacher mathematischer Notationen zu bedienen. (3. Feststellung)

Diese Beobachtung ist sicherlich nicht symptomatisch für die Klasse 6 , sondern vermutlich eher Ausdruck von Unterlassungen im allgemeinen Vermittlungsprozeß von Mathematik. So fällt z.B. auf, daß das einfache, althergebrachte Strukturierungsmittel -Tabelle - sowohl als Notationsschema wie als Strukturierungshilfe selten benutzt wird. In Kontrast dazu steht auch die Feststellung, daß die PC-Software zahlreicher Organisationsprogramme, die gerade für Nichtmathematiker entwickelt wurden, in der Grundstruktur von einem Rechenblatt, d.h. einer Tabelle ausgeht (RagTime, Jazz, Excel, Multiplan usw.).

Literatur

[1] G. Polya, R.E. Tarjan, D.R. Woods, Notes on introductory combinatorics. Boston: Birkhäuser 1983.

[2] W. Szetela; B. Rabijewska, A study of problem solving in Poland and Canada: a focus on errors and misconceptions. 1988. Erscheint demnächst.

[3] W. Szetela, The problem of evaluation in problem solving: Can we find solutions? *Arithmetic Teacher* **35** (1987) 3, 36 - 41.

[4] W. Szetela; G. Törner, Observations of performance on problem solving among grade 5 students in Canada and West Germany. Manuskript 1988.