Günter TÖRNER, Duisburg

Mentale Repräsentationen – der Zusammenhang zwischen ‚Subject-Matter Knowledge' und ‚Pedagogical Content Knowledge' – dargestellt am Beispiel der Exponentialfunktion in einer Fallstudie mit Lehramtsstudenten

... die e-Funktion ... die sieht einfacher aus als sie ist (B.R.)

In der amerikanischen fachdidaktischen Literatur wird vielfach zwischen ‚subject matter knowledge', ‚pedagogical content knowledge' und ‚pedagogical knowledge' (Shulman, 1986) unterschieden. Dieses begriffliche Konzept wird in einer Fallstudie mit 6 gymnasialen Lehramtskandidaten (im Hauptstudium) angewandt, um einerseits diese Begriffskategorien zur Beschreibung des Ist-Zustandes zu benutzen, um aber auch andererseits individuelle mentale Repräsentationen von Exponentialfunktionen zu beschreiben, eine Fragestellung, die von Davis (1992) als zentrales Forschungsproblem eingestuft wird. Bei der Vermittlung mathematischen Wissens (Anfängervorlesung) wird in der Regel einem verallgemeinert verstandenen ‚pedagogical content knowledge' anscheinend eine untergeordnete Rolle beigemessen. Möglicherweise werden Defizite beim ‚subject matter knowledge' durch ein unzureichendes ‚pedagogical content knowledge' nicht nur verdeckt, sondern sogar begünstigt, weil entsprechende Lücken beim letzteren keinen Nachfragedruck ausüben.

1. Zum Hintergrund der Forschungsfrage. Schoenfeld hat 1998 mit einer bemerkenswerten Arbeit über ‚Toward a theory of teaching-in-context' die Frage neu aktualisiert, inwieweit sich Vorgänge beim teaching-in-context möglicherweise sogar durch Modelle beschreiben lassen. Was schon an anderer Stelle sich abzeichnete, steht im Mittelpunkt seiner Untersuchung, nämlich „*knowledge, beliefs and goals are critically important determinants of what teachers do and why teachers do. The model which he develops describes, at a level of mechanism, the ways in which the teacher's goals, beliefs, and knowledge interact.*" Diesem teaching-in-context steht in dualer Weise ein ‚replying-in-context' gegenüber, wenn man darunter das spontane Referieren von Mathematik versteht und es sollte erwartet werden, dass hier ebenfalls knowledge und beliefs in vielfacher Weise miteinander verwoben sind.

Dieser Frage ist der Autor nachgegangen, in dem er mit sechs Lehramtskandidaten (Hauptstudium) ein freies Interview zum Thema ‚Exponentialfunktionen' geführt hat. Ein besonderer Fokus wurde dabei auf die Art des Wissens und der geäußerten Beliefs gelegt (vgl. Abschnitt 2) und die Frage verfolgt, welche mentalen Repräsentationen dominant sind. Die Entscheidung für dieses Thema ergab sich aus dem Umstand, dass es natürlich studiums- wie auch schulrelevant ist und einen hohen Vernetzungsgrad zu anderen Bereichen aufweist.

Die Teilnahme an diesen Interviews erfolgte aufgrund einer freiwilligen Meldung. Die Interviews dauerten 30 – 45 Minuten, das Gespräch wurde auf Videoband aufgezeichnet, stichwortartig transscripiert und auszugsweise den Kandidaten zur Abstimmung vorgelegt.

2. Zur theoretischen Einordnung. Wenn wir im Folgenden uns der englischen Terminologie bedienen, dann steht dahinter die Beobachtung, dass diese Begrifflichkeiten in der englisch-sprachigen fachdidaktischen Literatur in mehreren Publikationen auf mathematische Kontexte angewandt wurden (vgl. Shulman, 1986; Bromme, 1994; Even & Tirosh, 1995). Die Bezeichnungen ‚subject-matter knowledge' wie ‚pedagogical knowledge' verstehen sich wohl von selbst. ‚Pedagogical content knowledge' – (vgl. Shulman, 1986) - ist das Wissen rund um den mathematischen Kontext, insbesondere unter dem Blickwinkel, dass dieser Inhalt Lehrgegenstand ist. Insofern kommt dem ‚pedagogical content knowledge' eine Brückenfunktion zu, es ist Reflexionswissen, es ist Orientierungswissen, dass Vernetzungsaspekte beinhaltet (zu Erweiterungen, vgl. Bromme (1994). Lediglich eine weitere Verallgemeinerung soll hier noch erwähnt werden. Wie an anderer Stelle diskutiert (Calderhead 1996), muss die alte Frage, was einerseits als ‚knowledge', andererseits als ‚beliefs' einzustufen ist, weiterhin als nicht einvernehmlich beantwortbar angesehen werden. Insofern relativieren wir unsere Kategorisierung, in dem wir hartes ‚knowledge' vielfach durch die ‚weicheren' beliefs ersetzen.

3. Zur Durchführung der Interviews. Die im Kern offene Gesprächsführung im Interview orientierte sich an folgenden Fragen. Bekanntgabe des Themas – Rückfrage nach der spontanen Befindlichkeit; Begriffsklärung: Exponentialfunktionen – e-Funktion; Herangehensweise in der Schule; Behandlungsweise im Studium; mögliche Definitionen für die e-Funktion; Eigenschaften der e-Funktion; was ist e? Welche Dezimalen sind bekannt? Vergleich schulische Behandlung versus universitäre Behandlung; außermathematische Bedeutung der e-Funktionen; Metapher: betrachtet man die diversen Funktionen in der Analysis als Zootiere; welchen Tieren entsprechen die Exponentialfunktionen? Exponentialfunktion und Geschichte der Mathematik; Rückfrage nach ‚weißen' Flecken, die man gerne füllen möchten?

4. Einige Resultate. Hier sollen einige Detailergebnisse referiert werden, die auch die begriffliche Differenzierung in ‚subject-matter knowledge' und ‚pedagogical content knowledge' verdeutlichen helfen. Die unvorbereitete Frage nach der *Euler'schen Zahl* e = 2,71 82 82... lässt bestenfalls eine Dezimalstelle deutlich werden. Das Reproduzieren einzelner Stellen gehört zum ‚subject-matter knowledge', die Bemerkung, *da gibt es viele weitere Stellen, die ich nicht kenne,* assoziiert die Irrationalität von e; noch eindeutiger als ‚pedagogical content knowledge' ist die Aussage zu interpretieren, dass e für die Mathematiker so etwas wie eine Naturkonstante ist. Insofern hat ‚pedagogical content knowledge' auch Bewertungscharakter. In die gleiche Richtung weisen Bemerkungen, dass man die Euler'sche Zahl nicht im eigentlichen Sinne festgelegt hat, sondern sie wurde konstruiert, um nämlich $f' = f$ zu realisieren.

Auch die Antworten zur *Exponentialfunktion* unterstreichen die aufschlußreiche Differenzierung zwischen ‚subject-matter knowledge' und ‚pedagogical content knowledge'.

Andererseits waren Rückfragen nach dem, was man *unter exponentiellem Wachstum* versteht, auf den Blick erfolgreich; hier fielen Schlagworte wie Wachstum von Algen, Fischen, Bakterien usw., ohne dass man aber die Qualität des Exponentiellen auch nur annähernd quantifizieren konnte. Sinngemäßes gilt für Anwendungsrelevanz der Exponentialfunktionen.

5. Allgemeine Beobachtungen. *Zur Differenzierung zwischen ‚Subject-matter knowledge' und ‚Pedagogical Content Knowledge.* **Mangelnde Verknüpfung von ‚subject-matter - und ‚pedagogical content knowledge'.** In der Mehrzahl der Fälle konnte beobachtet werden, dass entweder ‚subject-matter knowledge' präsent war, weitergehendes ‚pedagogical content knowledge' aber nicht abgerufen werden konnte; umgekehrt kann manches, was als ‚pedagogical content knowledge' einzustufen gewesen wäre, als äußerst vage bezeichnet werden. Die präsentierten Informationen oder Einschätzungen hatten ‚wolkigen' Charakter, ohne einen eigentlichen Kern aufzuweisen. Diese Einschätzung bestätigte sich auch bei Fragen, inwieweit Vorwissen um die Exponentialfunktionen integriert wurde oder wenn nach ‚weißen Flecken' recherchiert wurde, die der Interviewte gerne gefüllt hätte. Diese Beurteilung ist auch konsistent zu einer weiteren Beobachtung, dass **nämlich ‚pedagogical content knowledge' nicht selten nicht vorhandenes ‚subject-matter knowledge' kaschiert**.

Zur Differenzierung zwischen ‚Knowledge' und ‚Beliefs'. Nur eingeschränkt sind die präsentierten Informationen als ‚knowledge' zu qualifizieren; **viele Aussagen haben originären ‚Beliefs-Charakter'**, insbesondere weil bei Rückfragen oft eine Verankerung an Autoritäten (Lehrer, besonderer Assistent in einem Kurs, der Hochschullehrer, Kommilitone und Freund usw.) erfolgte.

Kennzeichnend ist auch die Gleichgültigkeit gegenüber dem geschichtlichen Prozess der Mathematisierung (vgl. H.M. Enzensberger's These von der **Mathematik als im Jenseits der Kultur**). Im Gegensatz dazu weiss der Physikstudent viel über die mathematische Bedeutung der e-Funktion zu berichten. Fast alle Studenten hatten ein wenig ausgeprägtes, eher abstinentes mathematisches Weltbild gegenüber den Naturwissenschaften.

Zur Frage der Repräsentation der e-Funktion. Mental dominant ist die formale Repräsentation als differenzierbare, sich selbst reproduzierende ($f' = f$) Funktion f. Diese Vorstellung geht einher mit einem naiven Exponentialfunktionsverständnis, als könnte man für e genau so gut auch 3 schreiben. Die stets gestellte Frage nach dem Wert der e-Funktion an der Stelle π wurde immer ähnlich beantwortet, nämlich als **Taschenrechnerproblem** degradiert. Dass $f = f'$ charakterisierend ist und mental dominant eingestuft wird, liegt nicht primär an der Exklusivität dieser Differentialgleichung, sondern ‚erklärt' sich durch *...man sich nur etwas Einfaches zu merken hat* bzw. *dass man sich beim Ableiten nicht verrechnen kann.* Hier scheint der mnemotechnische Vorteil prägender als alles andere zu sein. Dies geht einher mit **einer Relativierung von mathematischen Strukturelementen;** sie ‚verschwimmen' in der mentalen Repräsentation: *... kam das als Aussage oder als Definition? ... weiss ich nicht mehr!* Im Gegenteil: **fachliche Vernetzungen in der Repräsentation können auch erschwerend** eingeschätzt werden. Eine Studentin berichtete, dass mit der Nennung des Themas das Funktionspaar (e-Funktion, natürlicher Logarithmus) ihr bildhaft vor Augen stand. Das habe sie sich eingeprägt, weil sie sich mit der ‚leichten' e-Funktion die ‚schwere' ln-Funktion erarbeitet habe. Insofern ist es nicht überraschend, dass die **Wissensrepräsentation eng mit emotionalen Strukturen** verknüpft ist, wie mehrere zurückhaltende Aussagen der Studenten belegen, die sowohl auf schulische Episoden als auch auf universitäre Begegnungen verweisen.

Literatur

Calderhead, J. 1996. *Teachers: Beliefs and Knowledge.* In: Berliner, D.C. & Calfee, R. (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 709 - 725). New York: Simon & Schuster Macmillan.

Davis, R.B. 1992. Reflections on where mathematics education now stands and on where it may be going. In D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 724 - 734). New York: Macmillan Publishing.

Even, R.& Tirosh, D. 1995. *Knowing that and knowing why: Subject-Matter knowledge and knowledge about students as sources of mathematics pedagogical knowledge. Educ.Studies in Mathematics* **29**, 1-20.

Ernest, P. 1999. Forms of knowledge in mathematics and mathematics education: philosophical and rhetorical perspectives. *Educ. Studies in Mathematics* **38**, 67 - 83.

Schoenfeld, A. 1998. Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education* **4**, 1 - 94.

Shulman, L.S. 1986. Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* **15**, 4 - 14.