

SCHRIFTENREIHE DES FACHBEREICHS MATHEMATIK

Stabilitätsuntersuchungen von Regelkreisen mit
Fuzzy-Komponenten

Thomas Möllers, Günter Törner
and Niels Kiupel

SM - DU - 277

1995

Eingegangen am 3.3.1995

Stabilitätsuntersuchungen von Regelkreisen mit Fuzzy-Komponenten

Thomas Möllers * Günter Törner †

Niels Kiupel ‡

Gerhard-Mercator-Universität
Gesamthochschule Duisburg

Kurzfassung: *In diesem Beitrag wird ein Stabilitätskriterium für Eingrößenregelkreise mit Fuzzy-Komponenten angegeben. Das Kriterium stellt eine hinreichende Bedingung an die Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgröße des Fuzzy-Reglers dar. Man benötigt dazu die Übertragungsfunktion der Strecke. In Vorbereitung des Stabilitätskriteriums werden verschiedene Zusammenhänge der Reglerkennlinie mit der Form der Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgröße formuliert, z. B. Stetigkeit, Linearität, konstante Abschnitte und Krümmungsverhalten.*

1 Einleitung

Ein wichtiges Entwurfskriterium eines Regelkreises ist im klassischen wie im fuzzifizierten Fall die Stabilität. Die intensive Forschung der letzten Jahre hat viele der klassischen Stabilitätskriterien so modifiziert, daß sie für Regelkreise mit Fuzzy-Komponenten geeignet sind. So wurde die sehr allgemeine Methode des Stabilitätsbeweises durch Entwurf einer Ljapunov-Funktion durch Kiendl und Rüger [8] weiterentwickelt. Ebenso gibt es Adaptionen für Fuzzy-Regler auf der Basis der Methode der Harmonischen Balance [8], der Stabilitätsuntersuchung mittels der Wurzelortskurve [3], des Popov-Kriteriums [3], [13] und der Hyperstabilitätstheorie [2], [13], [14].

Die beiden letztgenannten Kriterien behandeln das Problem der Absoluten Stabilität [6]. Sie geben hinreichende Bedingungen an, die der Regler erfüllen muß, um die Stabilität der gesamten Regelkreise zu gewährleisten. Deshalb eignen sie sich besonders für Fuzzy-Regler.

* Fachbereich Mathematik

† Fachbereich Mathematik

‡ Fachbereich Elektrotechnik

In dieser Arbeit werden, ausgehend von den bekannten Stabilitätskriterien, Fuzzy-Stabilitätskriterien hergeleitet. Dies bedeutet, daß hinreichende Bedingungen für die Parameter und Optionen des Fuzzy-Reglers gesucht werden. Berücksichtigt man solche Vorgaben bereits beim Entwurf eines Regelkreises, so garantieren diese Stabilität.

Es wird zunächst das verwendete Stabilitätskriterium, das auf der Hyperstabilitätstheorie aufbaut, angegeben.

Das vierte Kapitel präsentiert ein neues hinreichendes Stabilitätskriterium, welches direkt anhand der benutzten Zugehörigkeitsfunktionen eine Aussage liefert. Ausgehend von dem Stabilitätssatz 2.3, der eine Spezifikation der Hyperstabilitätstheorie ist [12], wird ein Stabilitätskriterium in der Fuzzy-Terminologie entwickelt. Dazu werden verschiedene Zusammenhänge der Reglerkennlinie mit den Zugehörigkeitsfunktionen aufgezeigt. Von Interesse ist, wie sich bestimmte Eigenschaften der Kennlinie direkt an den Zugehörigkeitsfunktionen ablesen lassen.

Da in der Fuzzifizierung zahlreiche Freiheitsgrade genutzt werden können, läßt sich unter Berücksichtigung solcher Vorgaben bereits beim Entwurf gegebenenfalls Stabilität garantieren.

Diese Ergebnisse werden schließlich durch ein Beispiel illustriert.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt wird das verwendete klassische Stabilitätskriterium hergeleitet. Zu seiner Formulierung ist ein Begriff notwendig, der zunächst definiert und dann näher charakterisiert wird. Der Einfachheit halber erinnern wir uns an die folgende Definition ([10], S. 361ff.):

Definition 2.1 Die rationale Funktion $G \in \mathcal{C}(s)$ heißt streng positiv reell, wenn gilt:

- (i) $G(s) \in \mathbb{R}$ für alle $s \in \mathbb{R}$
- (ii) Kein Pol von G liegt in der abgeschlossenen rechten Halbebene.
- (iii) $\operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Die Forderung, daß G eine streng positiv reelle Übertragungsfunktion ist, ist sehr stark. Was dies im einzelnen für rationale Übertragungsfunktionen bedeutet, sagt das folgende Lemma.

Lemma 2.2 Seien $Z, N \in \mathcal{C}[s]$ Polynome derart, daß sie keine gemeinsamen Nullstellen haben. Es werde ferner $G := \frac{Z}{N}$ als positiv reell vorausgesetzt, dann gilt:

- (i) Die Polynome Z und N haben reelle Koeffizienten.
- (ii) Die Funktion $\frac{1}{G}$ ist positiv reell.
- (iii) Die Polynome Z und N erfüllen das Hurwitz-Kriterium, d.h. ihre Nullstellen haben keinen positiven Realteil.
- (iv) Der Grad des Zählerpolynoms Z unterscheidet sich vom Grad des Nennerpolynoms N um höchstens ± 1 .

Beweis: Vgl. ([11], S. 31f.). ■

Befindet sich die Ortskurve des Frequenzganges nicht ganz in der rechten Halbebene, dann kann man sich mit einer Modifikation des Regelkreises behelfen [12]. Es gibt unter gewissen Voraussetzungen eine reelle Zahl $\alpha > 0$, so daß

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] + \alpha > 0 \quad (1)$$

gilt. Ein solches α , das Gleichung (1) erfüllt, kann man immer dann finden, wenn man I^2 -Verhalten der Strecke¹ ausschließt, da nur in diesem Fall der Realteil der Ortskurve für $\omega \rightarrow \infty$ gegen $-\infty$ strebt. Man hat also lediglich eine Konstante zur Übertragungsfunktion zu addieren. Damit der Regelkreis wieder das gleiche Übertragungsverhalten hat, muß man noch eine zusätzliche Rückkopplung einführen, wie es in Abbildung 1 gezeigt wird. Die so modifizierte Übertragungsfunktion G^* ist nun

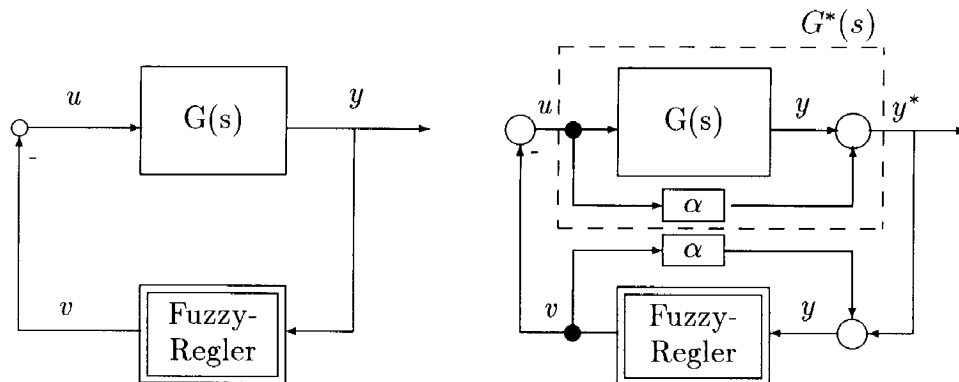


Abbildung 1: Zwei äquivalente Regelkreise

positiv reell. Für den Regelkreis mit der Übertragungsfunktion G^* lautet die Gleichung des Rückkopplungszweigs, wenn f die Kennlinie des Fuzzy-Reglers bezeichnet, nun

$$v = f(y^* + \alpha v).$$

¹Mit I^2 -Verhalten ist gemeint, daß die Übertragungsfunktion einen doppelten Pol im Ursprung der komplexen Ebenen hat.

Aus einem Stabilitätssatz der Hyperstabilitätstheorie [12] folgt nun ein hinreichendes Stabilitätskriterium.

Satz 2.3 *Es sei G eine lineare zeitinvariante Übertragungsfunktion, die kein I^2 -Verhalten haben darf, jedoch I -Verhalten aufweisen kann.*

- (i) *Dann gibt es eine reelle Zahl $\alpha > 0$, so daß die Übertragungsfunktion $G^* := G + \alpha$ streng positiv reell ist.*
- (ii) *Erfüllt die Kennlinie des Reglers f überdies die Ungleichung*

$$0 \leq \frac{f(y)}{y} \leq \frac{1}{\alpha} \quad (y \neq 0),$$

dann ist der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil.

Beweis: Vgl. [12]. ■

Der Satz 2.3 hat große Ähnlichkeit mit dem Popov-Kriterium, tatsächlich geht er aus der Hyperstabilitätstheorie hervor, welche eine Verallgemeinerung des Popov-Kriteriums darstellt (vgl. [12], [16]). Er macht zunächst eine allgemeine Aussage über die Stabilität eines Regelkreises mit Kennlinienregler. Da jeder Fuzzy-Regler durch eine statische Kennlinie beschrieben werden kann, ist die Anwendung des Satzes 2.3 auf Regelkreise mit Fuzzy-Reglern naheliegend.

3 Einschränkung der untersuchten Systeme

Den folgenden Betrachtungen liegt der Eingrößenregelkreis gemäß Abbildung 2 zugrunde. Wir setzen voraus, daß G eine stabile LZI-Übertragungsfunktion ist, die

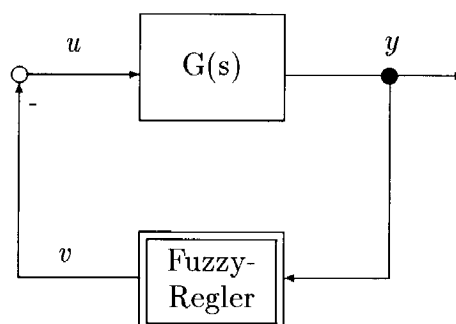


Abbildung 2: Standard Eingrößenregelkreis

I -Verhalten haben darf, also hat G höchstens einen einfachen Pol im Nullpunkt und

keine Pole in der rechten Halbebene. Dies ist eine wesentliche Voraussetzung des Satzes 2.3, den wir nun als Stabilitätskriterium verwenden. Die Kennlinie des Fuzzy-Reglers sei mit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnet, also schreiben wir $v = f(y)$.

In diesem Kapitel soll nun untersucht werden, wie man die vielen Freiheitsgrade eines Fuzzy-Reglers zu wählen hat, damit die hinreichende Stabilitätsbedingung nach Satz 2.3 eingehalten wird, wie also insbesondere f beeinflußt werden kann. Es liegt auf der Hand, daß gewisse Vereinfachungen und Einschränkungen nötig sind, sofern man ins Detail gehende Ergebnisse erzielen möchte. Dazu werden in den folgenden Unterabschnitten 3.1 bis 3.6 bestimmte Voraussetzungen getroffen. Zur bessere Lesbarkeit werden diese Voraussetzungen hervorgehoben und mit einer laufenden Nummer gekennzeichnet.

3.1 Klassifizierung der Zugehörigkeitsfunktionen

Es ist nötig, eine abstrakte Klassifizierung der Zugehörigkeitsfunktionen zu finden, damit man in den späteren Formulierungen unabhängig von den konkreten Ausprägungen der Zugehörigkeitsfunktionen ist. Zu diesem Zweck führen wir einen neuen Begriff ein.

Definition 3.1 *Es sei U eine Menge von Zugehörigkeitsfunktionen $\mu : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$. Wir sprechen von U als dem zugrundeliegenden Universum. Seien ferner die drei Teilmengen $N, Z, P \subset U$ folgendermaßen erklärt:*

$$N := \{ \mu(w) \in U \mid \exists w_{max} \in \mathbb{R}, w_{max} < 0 : \mu(w_{max}) \geq \mu(w) \quad \text{für alle } w \in \mathbb{R} \text{ und} \\ \mu(w) = 0 \quad \text{für alle } w > 0 \}$$

$$Z := \{ \mu(w) \in U \mid \mu(0) \geq \mu(w) \quad \text{für alle } w \in \mathbb{R} \}$$

$$P := \{ \mu(w) \in U \mid \exists w_{max} \in \mathbb{R}, w_{max} > 0 : \mu(w_{max}) \geq \mu(w) \quad \text{für alle } w \in \mathbb{R} \text{ und} \\ \mu(w) = 0 \quad \text{für alle } w < 0 \}$$

Dann heißt U von disjunktivem Typ, wenn $U = N \cup Z \cup P$ und $N \cap Z, N \cap P, Z \cap P$ höchstens die Nullfunktion enthält.

Im folgenden wird die Voraussetzung, daß U von disjunktivem Typ ist zentral sein. Wir halten deshalb fest:

Die Mengen (Universen) der Zugehörigkeitsfunktionen ist von disjunktivem Typ.	(V.1)
---	-------

Mathematisch gesehen existiert solch eine Überdeckung von U ohne weitere Vorgaben i. allg. nicht. Vom regelungstechnischen Standpunkt aus betrachtet, beschreibt die Einschränkung jedoch die praktische Situation. Zur Verdeutlichung betrachte man Abbildung 3.

Besteht ein Universum U nur aus Singletons, so ist dieses von disjunktiven Typ.

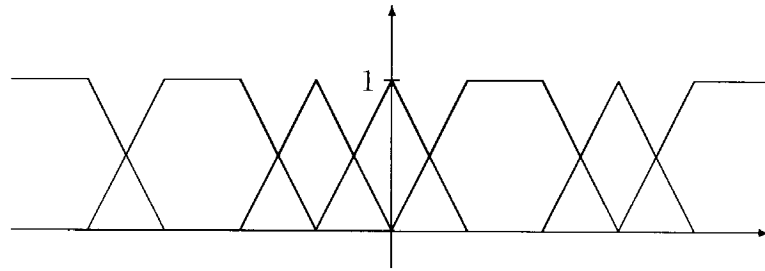


Abbildung 3: Beispiel eines Universums von disjunktivem Typ

3.2 Wahl der Regelbasis

Die Regelbasis darf nicht beliebig gewählt werden, vielmehr müssen die Regeln „sinnvoll“ sein und in die „richtige Richtung“ regeln. Unter Benutzung der Terminologie aus Abschnitt 3.1 gelangt man zu einfachen Bedingungen, die die Regelbasis erfüllen muß. In den weiteren Betrachtungen wird vorausgesetzt, daß diese Bedingungen erfüllt sind.

Zur Vereinfachung wird folgende Sprechweise vorgeschlagen. Obwohl die Elemente der Mengen N, Z und P inhaltlich Zugehörigkeitsfunktionen sind, macht für $w \in \mathcal{R}$ die suggestive Schreibweise „ $w \in N$ “ Sinn, wenn man für $w \in \mathcal{R}$ und $M \in \{N, Z, P\}$

$$w \in M : \iff \exists \mu \in M : \mu(w) \neq 0$$

definiert. Entsprechend erklärt man „ $w \notin N$ “ durch

$$w \notin M : \iff \forall \mu \in M : \mu(w) = 0.$$

Als Forderung an die Regeln läßt sich nun formulieren:

Die in der Regelbasis auftretenden Regeln seien so beschaffen, daß sie den nachstehenden Bedingungen genügen.

$$\begin{array}{ll}
 \text{WENN } y \in N & \text{DANN } (v \in N \text{ oder } v \in Z) \text{ und } v \notin P \\
 \text{WENN } y \in Z & \text{DANN } v \in Z \text{ und } v \notin N \text{ und } v \notin P \\
 \text{WENN } y \in P & \text{DANN } (v \in P \text{ oder } v \in Z) \text{ und } v \notin N
 \end{array} \tag{V.2}$$

Die Voraussetzung (V.2) gibt nur die Zielrichtung der tatsächlichen Regeln an, man kann sie als Vorzeichenregeln interpretieren, welche die Regelbasis einhalten soll.

3.3 Das Defuzzifizierungsverfahren

Das gebräuchlichste Defuzzifizierungsverfahren ist die Schwerpunkt- oder Center-of-Gravity-Methode. Die Nachteile dieser Methode bestehen in der aufwendigen Berechnung durch numerische Integration. Abhilfe schafft aber eine geeignete Wahl der Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße, wie sie weiter unten getroffen wird.

3.4 Die Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgröße

Die Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgröße sind das eigentliche Objekt der Untersuchung. Ihnen gilt deshalb das größte Interesse, weil in ihre Modellierung das Prozeßwissen entscheidend mit einfließt. Aus eben diesem Grunde macht es auch keinen Sinn, an diese Zugehörigkeitsfunktionen zu starke Forderungen zu stellen. Es seien an sie lediglich zwei recht allgemeine Voraussetzungen geknüpft.

<i>Das Universum U_{input} der Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgröße sei von disjunktivem Typ.</i>	(V.1a)
---	--------

<i>Die Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgröße seien normiert und sie seien trapez- oder dreiecksförmig oder Singletons.</i>	(V.3)
---	-------

Es sei eine reelle Zahl $M > 0$ derart gewählt, daß der Definitionsbereich der Eingangsgröße durch das Intervall $[-M, M]$ beschrieben wird. Daher schreiben wir suggestiv $M_{\text{input}} := M$. Die Anzahl der Zugehörigkeitsfunktionen in U_{input} sei durch $n_{\text{input}} \in \mathbb{N}$ gegeben.

3.5 Die Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße

Die grundlegende Voraussetzung für die Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße ist folgende.

<i>Die Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße seien normierte Singletons.</i>	(V.4)
---	-------

Nach Abschnitt 3.1 ist bekannt, daß das Universum dann von disjunktivem Typ ist. Es sei eine reelle Zahl $M > 0$ so gewählt, daß der Definitionsbereich der Ausgangsgröße durch das Intervall $[-M, M]$ beschrieben wird. Analog zu oben schreiben wir suggestiv $M_{\text{output}} := M$. Die Anzahl der Singletons sei durch die natürliche Zahl $n_{\text{output}} \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Punkte auf der y -Achse, bei denen ein Singleton auftritt, seien mit $p_1, \dots, p_{n_{\text{output}}}$ bezeichnet.

Die Zugehörigkeitsfunktionen sind dann durch

$$\mu_i(v) := \begin{cases} 1 & \text{für } v = p_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für alle } |v| \leq M_{\text{output}} \quad (2)$$

definiert.

Die Kennlinie des Fuzzy-Reglers hängt neben den Zugehörigkeitsfunktionen noch von der Regelbasis ab. Die Singletons der Ausgangsgröße, oder allgemeiner die Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße, sind über die Regelbasis mit den Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgröße verknüpft. Es kann erreicht werden, daß die Regelbasis als Abbildung

$$R : \{1, \dots, n_{\text{input}}\} \rightarrow \{1, \dots, n_{\text{output}}\}; \quad i \mapsto R(i)$$

geschrieben werden kann.

Durch die besondere Form der Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße, nämlich Singletons, ergibt sich aus dem gewählten Defuzzifizierungsverfahren die Schwerpunktmethod für Singletons (vgl. [7], S. 101f.). Der Rechenaufwand in diesem Fall ist wesentlich geringer als für die allgemeine Schwerpunktmethod. Damit läßt sich die Kennlinie in geschlossener Form angeben.

$$f(y) = \frac{\sum_{i=1}^{n_{\text{input}}} \mu_i(y) p_{R(i)}}{\sum_{i=1}^{n_{\text{input}}} \mu_i(y)} \quad \text{für alle } |y| \leq M_{\text{input}} \quad (3)$$

In der Formel (3) bezeichnet $\mu_i(y)$ die i -te Zugehörigkeitsfunktion der Eingangsgröße und $p_{R(i)}$ einen Singleton der mittels der Abbildung R , also mittels der Regelbasis, der i -ten Zugehörigkeitsfunktion der Eingangsgröße $\mu_i(y)$ zugeordnet ist.

3.6 Das Inferenzverfahren

Man unterscheidet im wesentlichen zwischen Max-Min-Inferenz und Max-Prod-Inferenz [15]. Das nachfolgende Lemma zeigt, daß das Ergebnis im hier betrachteten Fall unabhängig von einer Präferenz Max-Min-Inferenz versus Max-Prod-Inferenz ist.

Lemma 3.2 *Wählt man die Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße gemäß Voraussetzung (V.4) als Singletons, so liefern Max-Min-Inferenz und Max-Prod-Inferenz das gleiche Ergebnis.*

Beweis: Vgl. ([11], S. 48). ■

4 Einfluß der Zugehörigkeitsfunktionen auf die Kennlinie

4.1 Stetigkeit

Die Stetigkeit der Kennlinie ist wesentlich von der Stetigkeit der Zugehörigkeitsfunktionen abhängig.

Satz 4.1 *Es sei ein Fuzzy-Regler gegeben, der die Voraussetzungen (V.1), (V.2), (V.3) und (V.4) erfülle. Es seien $M = M_{\text{input}}$ und $n = n_{\text{input}}$ die nach Unterabschnitt 3.4 gegebenen Konstanten. Weiter sei $|y_0| \leq M$ und es seien in einer Umgebung $B_\varepsilon(y_0)$ von y_0 die Zugehörigkeitsfunktionen stetig. Gibt es eine Zugehörigkeitsfunktion $\mu \in N \cup Z \cup P$ mit*

$$\mu(y_0) \neq 0,$$

so ist die Kennlinie f in y_0 stetig.

Beweis: Vgl. ([11], S. 59). ■

Die Kennlinie ist global stetig, wenn die Zugehörigkeitsfunktionen über $[-M, M]$ stetig sind und in keinem Punkt alle Zugehörigkeitsfunktionen verschwinden.

4.2 Konstante Abschnitte

Ist in einem Intervall nur eine Zugehörigkeitsfunktion ungleich 0, dann ist die Kennlinie über diesem Intervall konstant:

Satz 4.2 *Es sei ein Fuzzy-Regler gegeben, der die Voraussetzungen (V.1), (V.2), (V.3) und (V.4) erfülle. Es seien $M = M_{\text{input}}$ und $n = n_{\text{input}}$ die nach Unterabschnitt 3.4 gegebenen Konstanten. Sei $l \in \{1, \dots, n\}$ der Index einer Zugehörigkeitsfunktion der Eingangsgröße μ_l . Ist in einem Intervall $I \subset [-M, M]$ nur die Zugehörigkeitsfunktion μ_l ungleich 0, so ist die Kennlinie im Intervall I konstant und es gilt:*

$$f(y) = p_{R(l)} \quad \text{für alle } y \in I.$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus Gleichung (3). ■

Es sei noch angemerkt, daß die in Satz 4.2 erwähnten Intervalle durchaus triviale Intervalle sein dürfen, also nur aus einem Punkt bestehen können. Vorweg sei schon darauf hingewiesen, das solche Punkte eine besondere Rolle für die Gestalt der Kennlinie spielen.

4.3 Krümmung

Eine häufig benutzte Vereinfachung ist, daß man die Zugehörigkeitsfunktion so wählt, daß ihre Summe in jedem Punkt 1 ergibt. Dadurch erhält man eine Kennlinie, die nur aus Geradenstücken besteht, wie der nachstehende Satz zeigt.

Satz 4.3 *Es sei ein Fuzzy-Regler gegeben, der die Voraussetzungen (V.1), (V.2), (V.3) und (V.4) erfülle. Es seien $M = M_{\text{input}}$ und $n = n_{\text{input}}$ die nach Unterabschnitt*

4 EINFLUß DER ZUGEHÖRIGKEITSFUNKTIONEN AUF DIE KENNLINIE 10

3.4 gegebenen Konstanten. Die Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgröße seien so gewählt, daß für alle $|y| \leq M$

$$\sum_{i=1}^n \mu_i(y) = 1 \quad (4)$$

gilt. Dann ist die Kennlinie des Fuzzy-Reglers stückweise affin linear.

Beweis: Vgl. ([11], S. 50). ■

Beispiel 4.4 Die Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße u wurden gemäß Voraussetzung (V.4) als Singletons gewählt. Wie die nachstehende Abbildung 4 zeigt, ist im Intervall $[3, 5]$ nur eine Zugehörigkeitsfunktion größer 0. Die Kennlinie $f(y)$ ist dort konstant. Insgesamt ist die Kennlinie stückweise affin linear.

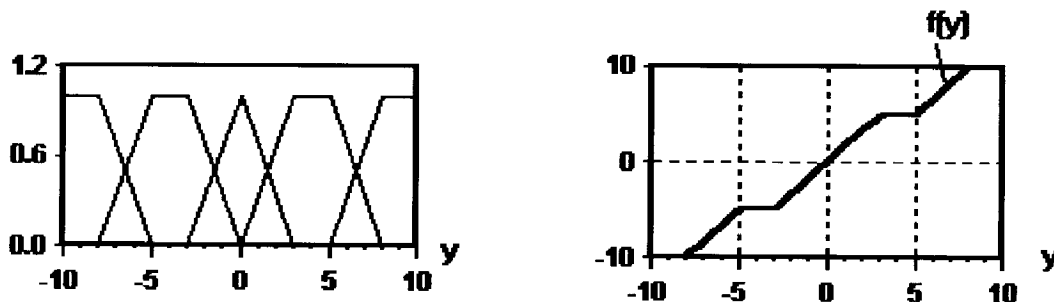


Abbildung 4: Beispiel zu Satz 4.2 und Satz 4.3

□

Da die Intervalle aus Satz 4.2, in denen genau eine Zugehörigkeitsfunktion größer 0 ist, durchaus nur aus einem Punkt bestehen dürfen, kann man mit diesem Satz einige Punkte der Kennlinie in einfacher Weise bestimmen. Es liegt auf der Hand, daß diese Punkte die Ungleichung aus Satz 2.3 erfüllen müssen, um Stabilität zu garantieren.

Zur genaueren Charakterisierung führen wir eine Funktion ein, die in jedem Punkt die Anzahl der Zugehörigkeitsfunktionen angibt, die ungleich 0 sind. Wir definieren also

$$\pi(x) := |\{\mu \in U \mid \mu(x) \neq 0\}|. \quad (5)$$

Von Interesse sind alle Punkte des Definitionsbereichs der Eingangsgröße y , für die $\pi(x) = 1$ gilt und in denen π für $x < 0$ rechtsseitig unstetig bzw. für $x > 0$ linksseitig unstetig ist. Für $x = 0$ muß die Kennlinie sowieso durch 0 gehen, was durch die Wahl eines disjunktiven Universums sichergestellt wird, so daß der Nullpunkt nicht weiter betrachtet werden muß.

Wir bezeichnen diese Punkte mit s_1, \dots, s_l , $l \in \mathbb{N}$ geeignet, und nennen sie *Stützstellen*. Wir können davon ausgehen, daß es nur endlich viele Stützstellen gibt, da

die Anzahl der Zugehörigkeitsfunktionen endlich ist und die Zugehörigkeitsfunktionen stetig gewählt werden. Die zu einer Stützstelle gehörende Zugehörigkeitsfunktion sei für $k \in \{1, \dots, l\}$ mit μ_{i_k} bezeichnet, diese Zuordnung ist eindeutig, weil nach Definition an jeder Stützstelle genau eine Zugehörigkeitsfunktion ungleich 0 ist.

Beispiel 4.5 Wir betrachten die Zugehörigkeitsfunktionen aus Abbildung 4. Nach Gleichung (5) ist die Funktion π dieses Universums gemäß Abbildung 5 gegeben.

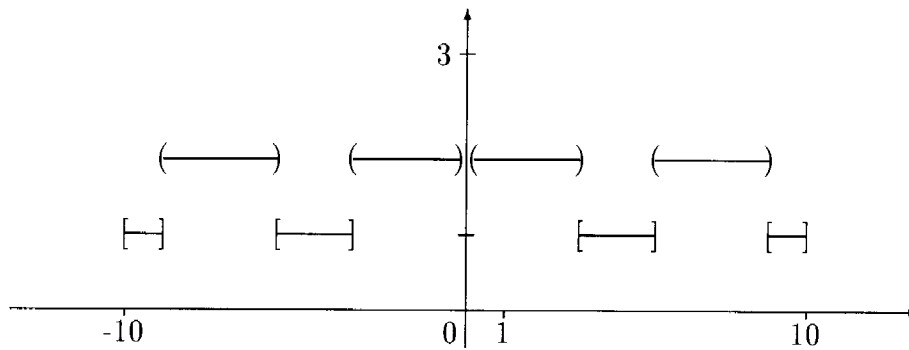


Abbildung 5: Die Funktion π zum Universum aus Abbildung 4

□

Man kann nun eine Aussage darüber treffen, wie groß der Funktionswert der Kennlinie an jeder Stützstelle sein darf, damit das Stabilitätskriterium aus Satz 2.3 nicht verletzt wird. Dieses besagt, daß die Kennlinie f betragsmäßig unterhalb der stabilitätssichernden Geraden $v = \frac{1}{\alpha}y$ zu liegen hat. Für die Stützstellen bedeutet dies, daß ihr Funktionswert ebenfalls betragsmäßig unterhalb der stabilitätssichernden Geraden liegen muß. Es muß also für $k \in \{1, \dots, l\}$

$$f(s_k) \leq \frac{1}{\alpha} s_k \tag{6}$$

gelten. Nach Satz 4.2 sind die Funktionswerte der Stützstellen bekannt. Einer Stützstelle s_k ist nämlich eine Zugehörigkeitsfunktion μ_{i_k} zugeordnet. Dieser Zugehörigkeitsfunktion μ_{i_k} wiederum ist über die Regelbasis, also mittels der in Unterabschnitt 3.5 erklärten Abbildung R , ein Wert $p_{R(i_k)}$ zugeordnet. Nach Satz 4.2 gilt für $k \in \{1, \dots, l\}$

$$f(s_k) = p_{R(i_k)}.$$

Die Kennlinie nimmt in einer Stützstelle also den Wert eines bestimmten Singletons der Ausgangsgröße an. Damit die Stützstellen das hinreichende Stabilitätskriterium

nach Satz 2.3 erfüllen, muß nach Gleichung (6) für $k \in \{1, \dots, l\}$

$$p_{R(i_k)} \leq \frac{1}{\alpha} s_k$$

gelten.

Wir fassen das eben gesagte zusammen.

Folgerung 4.6 *Es sei ein Fuzzy-Regler gegeben, der die Voraussetzungen (V.1), (V.2), (V.3) und (V.4) erfülle. Sei $l \in \mathbb{N}$. Ferner seien s_1, \dots, s_l die oben definierten Stützstellen. Dann ist die folgende Bedingung notwendig zur Erfüllung des hinreichenden Stabilitätskriteriums aus Satz 2.3:*

$$f(s_k) = p_{R(i_k)} \leq \frac{1}{\alpha} s_k \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, l\}. \quad (7)$$

Der Verlauf der Kennlinie zwischen den oben betrachteten Stützstellen s_1, \dots, s_l , läßt sich nicht direkt aus den Zugehörigkeitsfunktionen ablesen. Eine Stabilitätsaus-

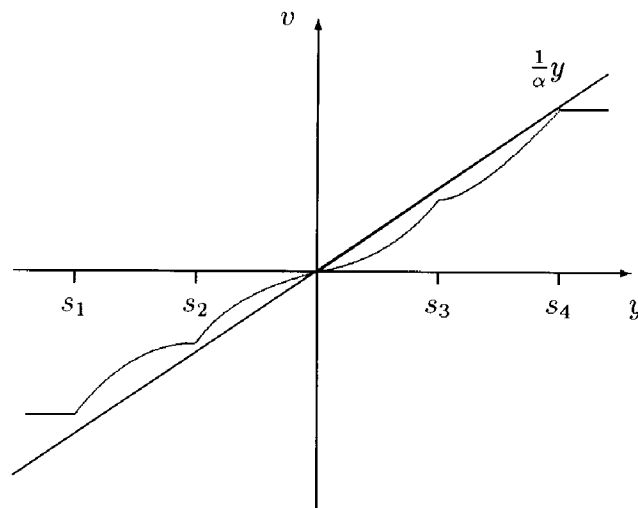


Abbildung 6: Konkaver bzw. konvexer Verlauf der Kennlinie zwischen den Stützstellen s_1, \dots, s_4

sage kann man aber bereits treffen, wenn man voraussetzt, daß die Stützstellen die Bedingung (7) erfüllen, und man nachweisen kann, daß die Kennlinie zwischen den Stützstellen in Abhängigkeit vom Vorzeichen konkav bzw. konvex ist.

Man betrachte Abbildung 6. Dort sind vier Stützstellen s_1, \dots, s_4 eingezeichnet, deren Funktionswerte betragsmäßig durch die stabilitätssichernde Gerade $v = \frac{1}{\alpha} y$

beschränkt sind. Im Fall $y > 0$ ist die Kennlinie zwischen den Stützstellen konvex, d. h. sie verläuft unterhalb des Polygonzugs, der die Stützstellen miteinander verbindet. Dieser Polygonzug liegt seinerseits unterhalb der stabilitätssichernden Geraden, weil die Stützstellen entsprechend vorausgesetzt wurden. Im Fall $y < 0$ ist die Kennlinie zwischen den Stützstellen konkav und liegt betragsmäßig ebenfalls unterhalb der stabilitätssichernden Geraden. Allgemein kann man sagen, daß es zur Sicherung der Stabilität genügt, wenn die Kennlinie $f(y)$ zwischen den Stützstellen konkav (für $y < 0$) bzw. konvex (für $y > 0$) ist.

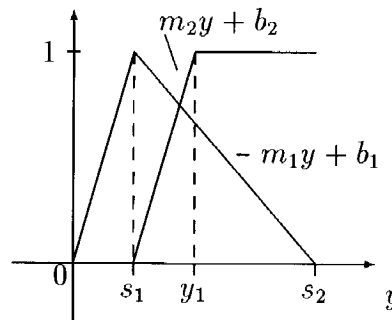


Abbildung 7: Zugehörigkeitsfunktionen, die einen konkaven bzw. konvexen Verlauf der Kennlinie verursachen

Der nachfolgende Satz gibt Aufschluß darüber, wie die Zugehörigkeitsfunktionen der Eingangsgröße gewählt werden müssen, damit die Kennlinie konkav bzw. konvex ist. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, daß höchstens zwei Zugehörigkeitsfunktionen ungleich 0 sind, daß also $\pi(x) \leq 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Jeder der beiden Zugehörigkeitsfunktionen ist über die Regelbasis ein Singleton der Ausgangsgröße zugeordnet. Wir bezeichnen den betragsmäßig größeren Singleton der Ausgangsgröße mit p_2 , er sei der Zugehörigkeitsfunktion μ_2 zugeordnet. Entsprechend sei der Zugehörigkeitsfunktion μ_1 der betragsmäßig kleinere Singleton der Ausgangsgröße p_1 zugeordnet. Weiter seien $s_1, s_2 \in [-M, M]$ zwei benachbarte Stützstellen. Sei $I \subset [s_1, s_2]$ ein offenes Intervall derart, daß beide Zugehörigkeitsfunktionen über I monoton und differenzierbar sind. Mit diesen Bezeichnungen formulieren wir den folgenden Satz.

Satz 4.7 *Es sei ein Fuzzy-Regler gegeben, der die Voraussetzungen (V.1), (V.2), (V.3) und (V.4) erfülle. Es sei $M = M_{\text{input}}$ die nach Unterabschnitt 3.4 gegebene Konstante. Es gelte $\pi(x) \leq 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

(i) Sei $0 \leq s_1 \leq s_2$. Dann gilt für die Kennlinie:

$$f(y) \begin{cases} \text{ist konkav, falls} & |\mu'_2(y)| > |\mu'_1(y)| & \text{für alle } y \in I \\ \text{ist affin linear, falls} & |\mu'_2(y)| = |\mu'_1(y)| & \text{für alle } y \in I \\ \text{ist konvex, falls} & |\mu'_2(y)| < |\mu'_1(y)| & \text{für alle } y \in I \end{cases}$$

(ii) Sei $0 \geq s_1 \geq s_2$. Dann gilt für die Kennlinie:

$$f(y) \begin{cases} \text{ist konkav, falls} & |\mu'_2(y)| < |\mu'_1(y)| & \text{für alle } y \in I \\ \text{ist affin linear, falls} & |\mu'_2(y)| = |\mu'_1(y)| & \text{für alle } y \in I \\ \text{ist konvex, falls} & |\mu'_2(y)| > |\mu'_1(y)| & \text{für alle } y \in I \end{cases}$$

Beispiel 4.8 Die Zugehörigkeitsfunktionen der Ausgangsgröße u wurden als Singletons gewählt.

Die in diesem Beispiel relevanten Stützstellen sind $y = -7, y = -5, y = -3, y = 3, y = 5, y = 7$. Daraus ergeben sich die Intervalle $[-7, -5]$ und $[-5, -3]$ für negatives y und $[3, 5]$ und $[5, 7]$ für positives y . Entsprechend der Voraussetzung des Satzes 4.7 bezeichnen wir diejenige Zugehörigkeitsfunktion mit μ_2 , welcher der betragsmäßig größere Singleton der Ausgangsgröße zugeordnet ist. Für negatives y ist dies die im betreffenden Intervall fallende Zugehörigkeitsfunktion. Für positives y ist es die im betreffenden Intervall steigende Zugehörigkeitsfunktion. Die Funktionswerte der Kennlinie in den Stützstellen sind durch den zugehörigen Singleton der Ausgangsgröße bestimmt. In diesem Beispiel gilt $f(-7) = -10, f(-5) = -5, f(-3) = 0, f(3) = 0, f(5) = 5$ und $f(7) = 10$.

Kommen wir nun zum Verhalten der Kennlinie in den einzelnen Intervallen. Im Intervall $[-7, -5]$ ist die Steigung der fallenden Zugehörigkeitsfunktion $\mu'_2(y)$ betragsmäßig kleiner als die der steigenden $\mu'_1(y)$. Nach Satz 4.7 ist deshalb die Kennlinie $f(y)$ in $[-7, -5]$ konkav. Wie man in Abbildung 8 erkennt liegt die Kennlinie in diesem Intervall tatsächlich oberhalb der Geraden durch die Punkte $(-7, -10)$ und $(-5, -5)$.

Im Intervall $[-5, -3]$ ist es umgekehrt, hier gilt $|\mu'_2(y)| > |\mu'_1(y)|$. Nach Satz 4.7 ist die Kennlinie im Intervall $[-5, -3]$ konvex, liegt also unterhalb der Geraden durch die Punkte $(-5, -5)$ und $(-3, 0)$ (vgl. Abbildung 8).

Für positives y erhält man die entsprechenden Aussagen. Hier sind die steigenden Zugehörigkeitsfunktionen mit $\mu_2(y)$ bezeichnet. Im Intervall $[3, 5]$ gilt $|\mu'_2(y)| > |\mu'_1(y)|$, deshalb ist $f(y)$ dort konkav, liegt also oberhalb der Geraden durch die Punkte $(3, 0)$ und $(5, 5)$ (vgl. Abbildung 8).

Da im Intervall $[5, 7]$ die Ungleichung $|\mu'_2(y)| < |\mu'_1(y)|$ gilt, ist die Kennlinie dort konvex, liegt also unterhalb der Geraden durch die Punkte $(5, 5)$ und $(7, 10)$ (vgl. Abbildung 8).

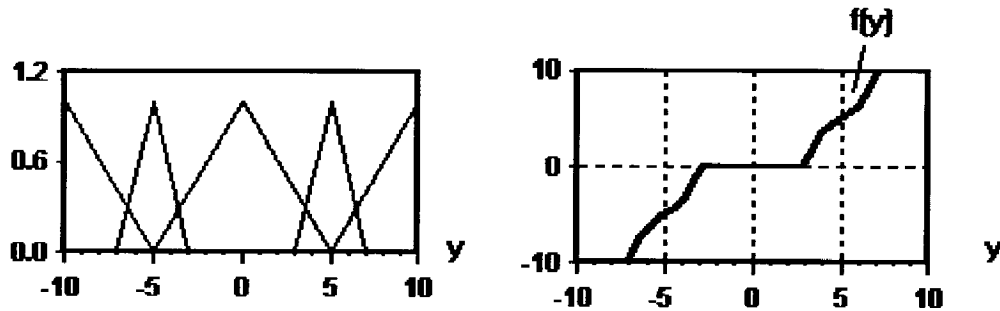


Abbildung 8: Beispiel zu Satz 4.7

□

4.4 Stabilität

Aus dem Satz 4.7 ergibt sich eine hinreichende Stabilitätsbedingung.

Satz 4.9 (Stabilitätssatz) *Es sei eine Strecke mit linearer zeitinvarianter Übertragungsfunktion G gegeben, die kein I^2 -Verhalten haben darf, jedoch I -Verhalten aufweisen kann. Sei $\alpha > 0$, so gewählt, daß $G + \alpha$ positiv reell ist. Weiter sei ein Fuzzy-Regler gegeben, der die Voraussetzungen (V.1), (V.2), (V.3) und (V.4) erfülle. Es gelte $\pi(x) \leq 2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Ferner erfüllen die Stützstellen s_1, \dots, s_l die Bedingungen aus Folgerung 4.6, d. h. für $k \in \{1, \dots, l\}$ gelte*

$$f(s_k) = p_{R(i_k)} \leq \frac{1}{\alpha} s_k.$$

Dann ist der Regelkreis stabil, wenn für jedes Intervall $I \subset [s_k, s_{k-1}]$, $k \in \{1, \dots, l-1\}$, in dem beide Zugehörigkeitsfunktionen monoton und differenzierbar sind, gilt:

- (i) *Es sei $y > 0$. Für zwei sich schneidende Geraden zweier Zugehörigkeitsfunktionen, ist im Intervall I die Steigung m_1 der fallenden Geraden $v = m_1 y + b_1$ dem Betrage nach größer als die Steigung m_2 der steigenden $v = m_2 y + b_2$.*
- (ii) *Es sei $y < 0$. Für zwei sich schneidende Geraden zweier Zugehörigkeitsfunktionen, ist im Intervall I die Steigung der fallenden Geraden dem Betrage nach kleiner als die der steigenden.*

5 Beispiel

In diesem Beispiel wird als Regelstrecke ein schwingfähiges VZ_2 -Glied, mit der Dämpfung $d = 0,25$ und der Zeitkonstanten $T = 1s$, betrachtet. Die Steigung der stabi-

litätssichernden Geraden berechnet sich zu

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{17}{8}.$$

(i) Im ersten Teilbeispiel wird die Kennlinie so entworfen, daß sie teilweise mit der stabilitätssichernden Geraden zusammenfällt (vgl. Abbildung 9). Wie die Sprung-

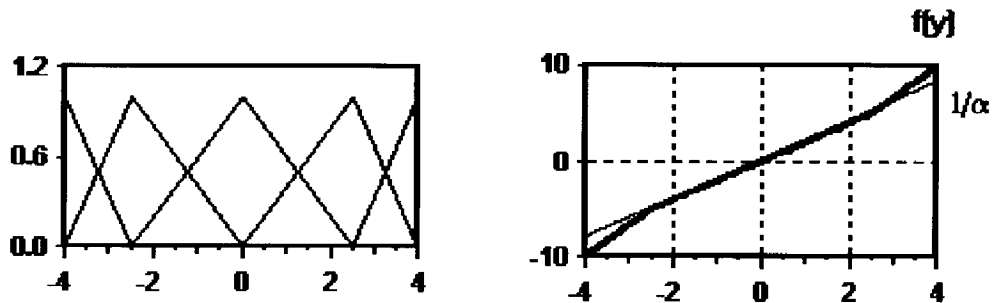


Abbildung 9: Zugehörigkeitsfunktionen aus Beispiel (i) mit zugehöriger Kennlinie und stabilitätssichernder Geraden der Steigung $\frac{1}{\alpha}$

antwort in Abbildung 10 zeigt, stellt sich eine periodische Schwingung ein, d. h. der Regelkreis befindet sich nahe der Stabilitätsgrenze. Es ist zu vermuten, daß der Kreis instabil wird, sobald man die Verstärkung weiter erhöht.

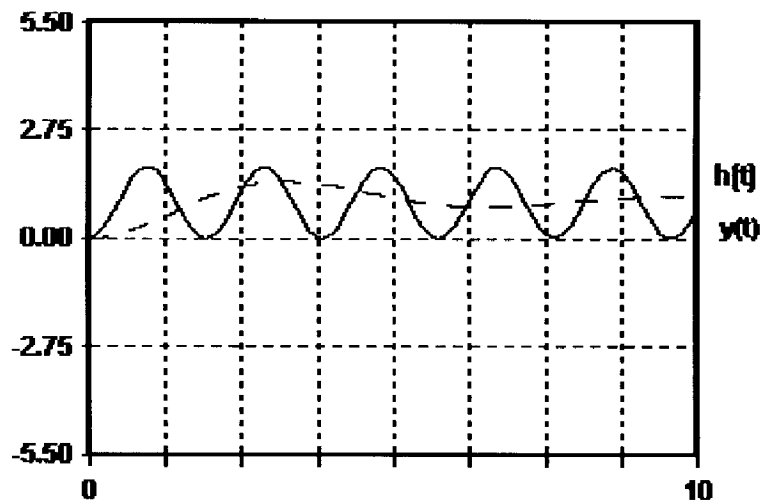


Abbildung 10: Sprungantwort zu Beispiel (i)

(ii) Mit einer flacheren² Kennlinie nach Abbildung 11 erhält man ein wesentlich besseres Zeitverhalten, wie Abbildung 12 zeigt. Die Regelgröße strebt hier ihrem Endwert entgegen.

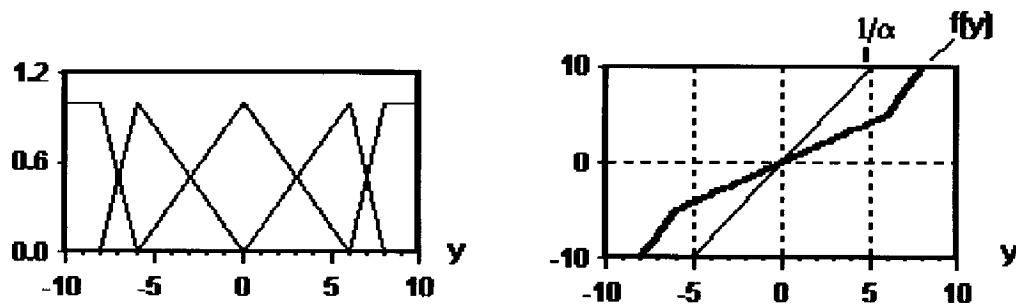


Abbildung 11: Zugehörigkeitsfunktionen aus Beispiel (ii) mit zugehöriger Kennlinie und stabilitätssichernder Geraden der Steigung $\frac{1}{\alpha}$

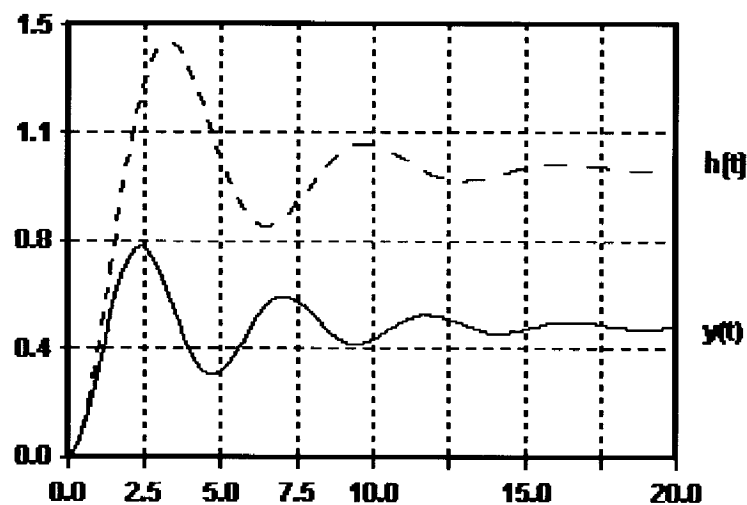


Abbildung 12: Sprungantwort zu Beispiel (ii)

6 Zusammenfassung und Ausblick

Es wurden verschiedene Eigenschaften der Regler-Kennlinie in der Formulierung des Fuzzy-Reglers angegeben. Insbesondere Stetigkeit, Linearität, konstante Abschnitte

²Man beachte den Maßstab

und Krümmung. Aus dem Krümmungsverhalten ließ sich eine hinreichende Stabilitätsbedingung angeben.

Die betrachteten Eingrößen-Regelkreise, bilden nur ein Teilgebiet der regelungstechnischen Forschung. In komplexeren technischen Systemen treten meist mehrere Größen auf. Es wäre deshalb wünschenswert, ein Stabilitätskriterium für Mehrgrößensysteme im Fuzzy-Bereich anzugeben.

Literatur

- [1] *Aracil, J., Garcia-Cerezo, A., Barreiro, A. und Ollero, A.:* Stability Analysis of Fuzzy Control Systems based on the Conicity Criterion. R. Lowen and M. Roubens (Hrsg.), Fuzzy Logic S. 487-496, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [2] *Böhm, R.:* Ein Ansatz zur Analyse von Fuzzy-Regelungen. 2. Workshop „Fuzzy-Control“ des GMA-UA 1.4.2, S. 24-35.
- [3] *Bühler, H.:* Stabilitätsuntersuchungen von Fuzzy-Regelungen. 3. Workshop „Fuzzy-Control“ des GMA-UA 1.4.2, S. 1-12.
- [4] *Desoer, C. A. und Vidyasagar, M.:* Feedback Systems. Input-Output Properties. Academic Press, 1975.
- [5] *Föllinger, O.:* Regelungstechnik: Eine Einführung in Methoden und ihre Anwendungen. 6. Auflage, Hüthig-Verlag Heidelberg, 1990.
- [6] *Föllinger, O.:* Nichtlineare Regelung I-III. R. Oldenbourg Verlag.
- [7] *Kahlert, J. und Frank, H.:* Fuzzy-Logik und Fuzzy-Control. Vieweg-Verlag, 1993.
- [8] *Kiendl, H. und Rüger, J. J.:* Verfahren zum Entwurf und Stabilitätsnachweis von Regelungssystemen mit Fuzzy-Reglern. Automatisierungstechnik 41 (1993), S. 138-144.
- [9] *Kiendl, H. und Rüger, J. J.:* The Design of Nonlinear Controllers and Proof of Stability Using Facet Functions. 2. European Control Conference ECC '93, Groningen, 1993.
- [10] *Landau, Y. D.:* Adaptive Control. Marcel Dekker Inc. New York Basel, 1979.
- [11] *Möllers, Th.:* Stabilitätsuntersuchungen von Regelkreisen mit Fuzzy-Komponenten. Diplomarbeit an der Gerhard-Mercator-Universität Gesamthochschule-Duisburg, Fachbereich Mathematik, 1994.

- [12] *Opitz, H.-P.*: Die Hyperstabilitätstheorie – eine systematische Methode zur Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme. *Automatisierungstechnik* 34 (1986), S. 221-230.
- [13] *Opitz, H.-P.*: Fuzzy-Control. *Automatisierungstechnik* 41 (1993), S. A21-A24.
- [14] *Opitz, H.-P.*: Stability Analysis and Fuzzy Control. International Workshop on Fuzzy Technologies in Automation and Intelligent Systems, Duisburg 1994.
- [15] *Preuß, H.-P.*: Fuzzy-Control – heuristische Regelung mittels unscharfer Logik. *Automatisierungstechnische Praxis* 34 (1992), S. 176-183 und S. 239-246.
- [16] *Popov, V. M.*: Hyperstability of Control Systems. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1973.
- [17] *Willems, J. L.*: Stabilität dynamischer Systeme. R. Oldenbourg Verlag München Wien, 1973.
- [18] *Zames, G.*: On the I-O stability of time Varying Non-Linear Feedback Systems. *IEEE Transaction on Automatic Control*, AC-11, S. 228-238, 1966.

KÜRZLICH ERSCHIENENE BEITRÄGE DER SCHRIFTENREIHE DES FB MATHEMATIK:

- Nr. 214: BRANDSTÄDT, A.; VOSS, H.-J.: Short disjoint cycles in graphs with degree constraints, 1993
- Nr. 215: ZHOU, X.-l.: Degree of approximation associated with some elliptic operators and its applications, 1993
- Nr. 216: KOUNCHEV, O.I.: Harmonicity moduli and applications in approximation theory, 1993
- Nr. 217: KNOOP, H.-B.; ZHOU, X.-l.: On convergence of Hermite-Fejér interpolation polynomials, 1993
- Nr. 218: ARNOLD, H.-J.: Regel-Relative, 1993
- Nr. 219: EBERHARD, W.; ELBERT, Á.: On the eigenvalues of half-linear boundary value problems, 1993
- Nr. 220: BANDEL, H.-J.; HENKMANN, A.; NICOLAI, F.: Powers of distance - hereditary graphs, 1993
- Nr. 221: KÜHNEL, W.: Bibliography on tight and taut immersions, 1993
- Nr. 222: ZHOU, X.-l.: Approximation by multivariate Bernstein operators, 1993
- Nr. 223: KOUNCHEV, O.: Zeros of non-negative sub-biharmonic functions and Extremal problems in the inverse source problem for the biharmonic potential, 1993
- Nr. 224: TÖRNER, G.; GRIGUTSCH, S.: "Mathematische Weltbilder" bei Studienanfängern - eine Erhebung, 1993
- Nr. 225: BRANDSTÄDT, A.; DRAGAN, F.F.; CHEPOI, V.D.; VOLOSHIN, V.I.: Dually chordal graphs, 1993
- Nr. 226: KOCH, P.: Asymptotic formulas for the eigenvalues of linear differential boundary problems with indefinite weight function, 1993
- Nr. 227: RENDER, H.: Large completions of quasi-uniform spaces, 1993
- Nr. 228: DRAGAN, F.F.; BRANDSTÄDT, A.: r -dominating cliques in Helly graphs and chordal graphs, 1993
- Nr. 229: BRUNGS, H.H.; TÖRNER, G.: I -compact rings, 1993
- Nr. 230: BRUNGS, H.H.; TÖRNER, G.: Right chain domains with prescribed value holoïds, 1993
- Nr. 231: FERRERO, M.; TÖRNER, G.: A note on waists of right distributive rings, 1993
- Nr. 232: LUTHER, W., OTTEN, W.: Verified inclusion for eigenvalues of the first order PLL equation with general phase detector characteristics, 1993
- Nr. 233: LUTHER, W., OTTEN, W.: Computation of standard interval functions in multiple-precision interval arithmetic, 1993
- Nr. 234: JANSEN, K.; MÜLLER, H.: The minimum broadcast time problem for several processor networks, 1993
- Nr. 235: DESSMARK, A.; JANSEN, K.; LINGAS, A.: The maximum k -dependent and f -dependent set problem, 1993
- Nr. 236: JANSEN, K.: Scheduling of incompatible jobs on unrelated machines, 1993
- Nr. 237: KOUNCHEV, O.I.: Splines constructed by pieces of polyharmonic functions, 1993
- Nr. 238: KÜHNEL, W.; RADEMACHER, H.-B.: Conformal diffeomorphisms preserving the Ricci tensor, 1993
- Nr. 239: KÜHNEL, W.; LASSMANN, G.: Permuted difference cycles and triangulated sphere bundles, 1993
- Nr. 240: JANSEN, K.: Scheduling and related graph theoretical problems, 1993
- Nr. 241: EBERHARD, W.; KOCH, P.: Modellierungsseminar zur Technomathematik - SS 1993 -, 1994
- Nr. 242: RENDER, H.: A nonstandard approach to realcompactness with applications to the equation $v(X \times Y) = v(X) \times v(Y)$, 1994
- Nr. 243: RENDER, H.: Countably determined sets and a conjecture of C.W. Henson, 1994
- Nr. 244: BRANDSTÄDT, A.; CHEPOI, V.D.; DRAGAN, F.F.: The algorithmic use of hypertree structure and maximum neighbourhood orderings, 1994
- Nr. 245: CHEPOI, V.; DRAGAN, F.: A linear-time algorithm for finding a central vertex of a chordal graph, 1994
- Nr. 246: ARNOLD, H.-J.: Regel-Relative, 1994

- Nr. 247: JETTER, K.; ZHOU, D.-X.: Order of linear approximation in shift-invariant spaces, 1994
- Nr. 248: DRAGAN, F.F.: Dominating cliques in distance-hereditary graphs, 1994
- Nr. 249: RENDER, H.: Covering functions and the inverse standard part map, 1994
- Nr. 250: EBERHARD, W.; KOCH, P.: Modellierungsseminar zur Technomathematik - WS 1993/94 -, 1994
- Nr. 251: BRANDSTÄDT, A.; CHEPOI, V.D.; DRAGAN, F.F.: Clique r -domination and clique r -packing problems on dually chordal graphs, 1994
- Nr. 252: BRANDSTÄDT, A.; CHEPOI, V.D.; DRAGAN, F.F.: Perfect elimination orderings of chordal powers of graphs, 1994
- Nr. 253: HERKENRATH, U.: Premium adjustment by generalized adaptive exponential smoothing, 1994
- Nr. 254: DUBROVIN, N.I.: The rational closure of group rings of left-ordered groups, 1994
- Nr. 255: NICOLAI, F.: A hypertree characterization of distance-hereditary graphs, 1994
- Nr. 256: KOUNCHEV, O.: Optimal recovery of linear functionals of Peano type through data on manifolds, 1994
- Nr. 257: JETTER, K.; STÖCKLER, J.: A generalization of de Boor's stability result and symmetric preconditioning, 1994
- Nr. 258: HAUSSMANN, W.; KOUNCHEV, O.I.: Peano kernel for harmonicity differences of order p , 1994
- Nr. 259: BULGARU, E.; VOLOSHIN, V.I.: Mixed interval hypergraphs, 1994
- Nr. 260: LUTHER, W.; OTTEN, W.: Beiträge zum wissenschaftlichen Rechnen, 1994
- Nr. 261: BRANDSTÄDT, A.; DRAGAN, F.F.: A linear-time algorithm for connected r -domination and Steiner tree on distance-hereditary graphs, 1994
- Nr. 262: CHEPOI, V.D.; DRAGAN, F.F.: Condorcet points of simple rectilinear polygons, 1994
- Nr. 263: ARBEITSKREIS MATHEMATIK IN FORSCHUNG UND PRAXIS: 8. Symposium "Mathematik in der Logistik und Betriebswirtschaft", Bad Honnef am 19./20. Mai 1994, 1994
- Nr. 264: NICOLAI, F.: Hamiltonian problems on distance-hereditary graphs, 1994
- Nr. 265: PEHKONEN, E.: Mathematische Vorstellungen von Schülern: der Begriff und einige Forschungsergebnisse, 1994
- Nr. 266: LUTHER, W.: Neue Lehr- und Lernsysteme aus informatischer und fachdidaktischer Sicht, 1994
- Nr. 267: WENZ, H.-J.: Interpolation and parametrization of curve data by blended generalized circles, 1994
- Nr. 268: BECKER, M.; KÜHNEL, W.: Hypersurfaces with constant inner curvature of the second fundamental form, and the non-rigidity of the sphere, 1994
- Nr. 269: JETTER, K.; ZHOU, D.-X.: Order of linear approximation from shift-invariant spaces II: Non-stationary and simultaneous approximation, 1994
- Nr. 270: PEHKONEN, E.; TÖRNER, G.: Development of Teachers' Conceptions about Mathematics Teaching: What are the key experiences for the change?, 1994
- Nr. 271: BRANDSTÄDT, A.; DRAGAN, F.F.; NICOLAI, F.: Homogeneously orderable graphs, 1994
- Nr. 272: ARBEITSKREIS MATHEMATIK IN FORSCHUNG UND PRAXIS: 9. Symposium "Fuzzy Sets und Neuronale Netze", Bad Honnef am 7./8. November 1994, 1994
- Nr. 273: CHUI, C.K.; JETTER, K.; STÖCKLER, J.; WARD, J.D.: Wavelets for analyzing scattered data: An unbounded operator approach, 1994
- Nr. 274: MOCKOR, J.: Fuzzy models with locally linear output functions, 1994
- Nr. 275: DRAGAN, F.F.; NICOLAI, F.: r -domination problems on homogeneously orderable graphs, 1995
- Nr. 276: DUMA, A.: Beiträge zur Theorie geometrischer Wahrscheinlichkeiten, 1995
- Nr. 277: MÖLLERS, T.; TÖRNER, G.; KIUPEL, N.: Stabilitätsuntersuchungen von Regelkreisen mit Fuzzy-Komponenten, 1995