Isomorphie – ein unterrichtsrelevanter Aspekt in der Kombinatorik?

Herrn G. Pickert zum 70. Geburtstag gewidmet

Günter TÖRNER, Duisburg

Abstract: The mathematical discipline of combinatorics has in contrast to other strucutre-orientated theories no general term for isomorphisms, however the working mathematician continuously makes use of a metamathematically understood concept of isomorphism without mentioning it explicitly.

This observation is important for didactics because these features reveal aspects which are relevant for the mathematical education.

Some of these constitutive factors are discussed in the article: the missing concept for isomorphisms serving as an explanation pattern for mistakes, the role of isomorphisms within random processes, the importance of the formation of a concept using ideas which are open for isomorphisms, the idea of isomorphism as heuristic principles.

Kurzreferat: Die fachwissenschaftliche Disziplin Kombinatorik kennt im Unterschied zu vielen anderen strukturorientierten Theorien keinen durchgängigen Isomorphismusbegriff, dennoch bedient sich der handelnde Mathematiker auf Schritt und Tritt implizit eines eher metamathematisch zu verstehenden Ismorphiekonzeptes, ohne es selbst zu thematisieren. Diese Beobachtung ist für den Didaktiker bedeutsam, weil hierbei unterrichtsrelevante Aspekte auftreten. Einige dieser Momente werden im Artikel ausgeführt: fehlendes Isomorphieverständnis als Fehlererklärungsmuster, die Rolle von Isomorphie bei Zufallsprozessen, Bedeutung von Isomorphie-freundlichen Begriffsbildungen, Isomorphie als heuristisches Prinzip zur Satzfindung und Beweisvorbereitung.

Ein sehr bescheidenes Dasein kommt der Kombinatorik zu, zumindest was die didaktische Diskussion in der Zeitschriftenliteratur anbetrifft (vgl. das Literaturverzeichnis am Ende des Artikels; damit sind vermutlich die meisten diesbezüglichen deutschsprachigen Grundsatzartikel benannt). Die Gründe dafür sind zahlreich.

Kombinatorik wird in allen deutschen Lehrplänen nur im Rahmen der Stochastik abgehandelt, zum Teil in Grundkursen auf „Kosten" der Stochastik (vgl. die Minimalüberlegungen bei Althoff [1]). So sehr berechtigt aus der Sicht des Stochastikers entstehende Zeitverluste sein mögen, es gibt zahlreiche Argumente, die eine eingehendere Behandlung der Kombinatorik vollauf legitimieren (vgl. auch Scheid [30]). Hierbei darf man mit gleicher Berechtigung wie im Falle der endlichen Geometrie, die ich nicht einfach nur als Teilgebiet der Kombinatorik ansehen will, auf die von Pickert [26] im Vorwort seines Buches über endliche Geometrie genannten Belege *Anwendung* und *Beziehung* verweisen.

Kombinatorik ist ein wesentliches Teilgebiet der Mathematik, das vielleicht, weil es als Fachgebiet zu den Kindheitstagen von N. Bourbaki noch im Status nascendi war oder weil diese Art von diskreter Mathematik einer Strukturierung bis ins letzte unüberwindbare Hemmnisse in den Weg gestellt hat, nicht zu den Mutterstrukturen der Mathematik gerechnet wurde. Die ständig ansteigende Zahl der Publikationen in den letzten Jahren (man vergleiche die Referateorgane) unterstreicht jedoch die enorme Innovationsfähigkeit, reiche Anwendungsvielfalt und Fruchtbarkeit dieser Disziplin, gerade auch im Hinblick auf die Informatik.

Irgendwo haftet jedoch dieser Disziplin noch der Makel an, nur bedingt seriöse Mathematik zu repräsentieren. In diesem Zusammenhang wird auf eine ihrer historischen Wurzeln verwiesen, denn viele Fragestellungen erwuchsen aus der Unterhaltungsmathematik (z. B. Bernoulli-Eulers Problem der vertauschten Briefe, Problème des Ménages, Problème des rencontres, Kirkmans Schulmädchenproblem); didaktisch gesehen ist dieser Umstand durchaus positiv zu werten, weil er unterstreicht, daß viele Aufgabenstellungen elementar zugänglich sind. Jedoch steht der Motivationskraft vieler elementarer Problemstellungen für den Schüler auf der anderen Seite eher eine gewisse Reserviertheit der Lehrer gegenüber, die ihre Ursache wohl auch darin hat, daß Kombinatorik nicht a priori eine Lehre von fertigen Strukturen (und standardisierten Lösungsschemata) ist, sondern daß gerade diese erst durch Prinzipien zumeist ad hoc geschaffen werden müssen. Diese sind vielfach nicht eindeutig in den jeweiligen Kontexten (Pluralität der Lösungsansätze (Perko [25])) und überdies selten elementar. Gerade das Konfrontieren verschiedener Strukturierungsansätze ist seinerseits aber ein fachwissenschaftliches Prinzip, etwa zum Herleiten kombinatorischer Identitäten, was nicht zuletzt auch didaktisch bedeutsam ist. Um es noch einmal anders zu betonen: Sucht man Themenkreise in der Mathematik, in denen Lösungswege nicht kanonisch sind, so greife man zur Kombinatorik ...

Damit sind wir bereits beim Anliegen dieses Artikels. Wenn man ansonsten von Isomorphiebetrachtungen im Unterricht spricht, weckt man Assoziationen an eine zurückliegende Zeit der ausufernden Strukturmathematik. In der Kombinatorik ist dies jedoch anders, sie lebt auch von Strukturen, die jedoch vielfach in jeder Aufgabe neu gefunden bzw. aufgeprägt werden müssen. Dabei bedient man sich eines Grundvorrats weniger Bauelemente und einiger heuristischen Strategien (vgl. Engel [11], S. 10). Auf verschiedenen Ebenen wird die Adäquatheit diverser Ansätze durch substantielle Isomorphieüberlegungen meist inhaltlicher Art kontrolliert und gerechtfertigt. Der Isomorphieaspekt ist in diesem Zusammenhang weniger ein Bestandteil der mathematischen Theorie, als vielmehr ein vielschichtiges heuristisches Prinzip und selbstverständliches Schema. Diesen Aspektenreichtum eines umfassend zu verstehenden Isomorphiebegriffes am Beispiel der schulzugänglichen Kombinatorik einmal zu beleuchten, ist Anliegen dieses Artikels. Die angesprochenen Punkte beanspruchen keine Vollständigkeit, auch muß ich mich um der Kürze der Arbeit willen zum Teil auf Anmerkungen beschränken. Weitere Facetten dieser fundamentalen Idee würden sicherlich in einer Diskussion herausgestellt werden – zum Nutzen des Unterrichtsthemas Kombinatorik, in dem wesentliche Mathematik lebt.

1. Zum Isomorphiebegriff in der Fachwissenschaft Kombinatorik

Sucht man im Stichwortverzeichnis eines Kombinatorik-Lehrbuches das Wort *Isomorphismus*, so sind, wenn überhaupt, Referenzen angegeben, die sich auf spezielle geometrische Strukturen beziehen. Als allgemeiner mathematischer Grundbegriff taucht der Terminus „Isomorphismus" nicht explizit auf, was wohl für eine weit verzweigte, heterogene Disziplin wie die Kombinatorik verständlich ist, in der eine einheitliche Grundstruktur fehlt. So versteht man nach Jeger ([18], S. 8) unter einer *kombinatorischen Figur „eine Anordnung von irgendwelchen Dingen aufgrund gegebener Vorschriften"*; dabei *„gehören zu jedem kombinatorischen Problem spezifische kombinatorische Figuren"*. Eine solche Definition erinnert ein wenig an das (verschämte) Bemühen von Euklid, dem Leser klarzumachen, was er sich unter einer Geraden vorzustellen hat. Den Ansatz Jegers aber dennoch fortführend sind *Isomorphismen* kombinatorisch relevante Bijektionen zwischen kombinatorischen Figuren. Eine stärkere Begriffseinschränkung erscheint nicht möglich und nicht angebracht. Dieses Nichtverbalisieren eines Isomorphiebegriffes in der Praxis bedeutet allerdings nicht, daß das *Isomorphiekonzept* nicht benutzt wird. Schaut man in Lehrbücher hinein, so findet man oft Redewendungen wie „... wir können ... auch anders darstellen, nämlich ...", „... wir dürfen annehmen, daß ...", „... diese Situation entspricht ..." usw. Hinter diesem eher inhaltsbezogenen Argumentieren steht, sofern die Standpunktverlagerungen nicht schon sofort mathematisch evident sind, zweifelsohne die Idee des Isomorphismus. Ebenfalls werden verschiedene konstitutive Merkmale, die Vollrath [34] im Zusammenhang mit der Rolle eines Begriffes herausgearbeitet hat, im unterrichtsnahen Kontext nachweisbar. In die gleiche Richtung weist eine Analyse der Lösungsansätze für die folgende Aufgabe, die in keinem Lehrbuch fehlt, nämlich das *Problème des ménages:*

(1) Auf wieviel Arten können sich n Ehepaare so um einen runden Tisch setzen, daß Frauen und Männer abwechselnd und keine Ehepartner nebeneinander sitzen?

Die Problemstellung stammt wohl vom französischen Mathematiker Lucas (1842–1891) und wurde schließlich von Touchard (1943) vollständig gelöst. Dieses Problem eignet sich hervorragend, die Lösungsvielfalt über unterschiedliche kombinatorische Figuren zu beleuchten, sei es, daß man sich des *Einschluß-/Ausschluß-Prinzips* (Halder; Heise [15], S. 45) bedient, sei es, daß man mit *Permanenten* (vgl. Ryser [29], S. 32f) arbeitet oder über die *Methode der Turmpolynome* an einem Lückenschachbrett vorgeht (vgl. Danckwerts; Vogel [7]). Hinter diesen Ansätzen stecken in weitestgehendem Sinne wieder *Ismorphismen* zwischen den jeweiligen kombinatorischen Figuren. Eine solche Lösungspluralität ist charakteristisch für die Kombinatorik.

Auch in unterrichtsnäherem Kontext gibt es entsprechende Aufgaben, wobei wir paradigmatisch auf die im Buch von Freudenthal ([13], S. 35) gestellte *„Ehepaar-Aufgabe"* aufmerksam machen wollen, die auch in Perko [25] angesprochen wird:

(2) Aus 5 Ehepaaren werden 4 Personen ausgewählt. In wieviel 4-Mengen ist kein Ehepaar?

Die Lösung $\binom{10}{4} - \binom{5}{2} - 5(\binom{8}{2} - 4)$ erhält man, indem man zunächst alle 4-Mengen zählt, davon jene subtrahiert, in denen zwei Ehepaare, nämlich $\binom{5}{2}$ und schließlich noch die Möglichkeiten ermittelt, Vierermengen mit genau einem Ehepaar zu besetzen.

Die Lösung $\binom{5}{0}\binom{5-0}{4-0} + \binom{5}{1}\binom{5-1}{4-1} + \dots + \binom{5}{3}\binom{5-3}{4-3}$ ergibt sich über das sorgfältige Auswählen der männlichen bzw. weiblichen Mitglieder des Ausschusses.

Die Lösung $(10 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4)/4!$ erklärt sich von selbst.

Die kürzeste numerische Beschreibung, nämlich $5 \cdot 2^4$, erhält man, indem man zunächst jenes Ehepaar aussondert, das durch keinen Ehepartner vertreten ist, während für jeden der 4 Teilnehmer dann noch 2 Wahlmöglichkeiten aus jedem Ehepaar bestehen.

Es liegt auf der Hand, daß das Gleichsetzen dieser Lösungen, insbesondere wenn man mit Parametern arbeitet, kombinatorische Identitäten liefert! Hierbei handelt es sich um ein wesentliches Lösungsprinzip in der Kombinatorik, gleichsam ein *heuristisches Korollar*, das die Äquivalenz kombinatorischer Figuren nach sich zieht.

Kaum eine mathematische Theorie ist so reich an plakativen Beschreibungen wie die Kombinatorik. Da ist vom *Taubenschlagprinzip* bzw. *Schubkasten-Prinzip* die Rede; eine mathematische Aussage nennt man *Heiratssatz*, da trifft man auf den *Satz vom Diktator* oder sucht Lösungen für das *Freundschaftsproblem*. Obgleich es sich jeweils um mathematische Aussagen handelt, verleugnen sie nicht ihre ursprüngliche Herkunft und liefern Beispiele für (Modell-)Isomorphismen zwischen Konfigurationen aus unterschiedlichen Kontexten, insbesondere zwischen der realen Welt und der Mathematik. Das *Problem der 36 Offiziere* kondensiert im Begriff von *orthogonalen lateinischen Quadraten;* Kirkmans *Schulmädchen* entwickeln sich zu *Steiner-Tripelsystemen.*

Aber auch im nachhinein entpuppten sich Strukturgleichheiten zwischen stereotypen kombinatorischen Konfigurationen vom Range l'art pour l'art und echten physikalischen Modellen als tragfähige Isomorphismen; man denke an die verschiedenen Zellbelegungsmodelle bzw. Urnenverteilaufgaben, die ihr Pendant finden in der *Bose-Einstein-Statistik* bzw. *Maxwell-Boltzmann-Statistik* (vgl. Feller [12]). Schließlich ist man erstaunt, daß das Belegen eines Lückenschachbrettes mit Domino-Steinen sehr wohl etwas zu tun haben soll mit der Absorption von zweiatomigen Molekülen an Oberflächen.

Fassen wir zusammen, so treten im Bereich der Kombinatorik trotz Fehlen eines universellen mathematischen Isomorphiebegriffes Schemata auf, die die fundamentale Idee der Isomorphie repräsentieren.

2. Isomorphie als didaktisch bedeutsame Idee

2.1 Schwierigkeiten mit dem Isomorphiegedanken

Jeder, der einmal Kombinatorik unterrichtet hat, weiß, daß immer wieder Schwierigkeiten bei den Schülern auftreten, die im Zusammenhang mit einem nicht weiter präzisierten Isomorphiebegriff stehen, der aber als Konzept von den Schülern intuitiv (richtig oder falsch) angewandt wird. Die klassische Didaktik hat versucht, diesen Zielsetzungen durch Kanonisierung in die sog. *Grundaufgaben* Rechnung zu tragen. Dieses Schematisieren ist gewißlich ein Schritt hin zum Erkennen von Isomorphismen bzw. zum Auszeichnen von Standardkonfigurationen. Verschiedene Vorschläge (z. B. Kirsch [22], Steibl [31]) plädieren für ein Beziehen auf einheitliche Referenzmodelle (z. B. die Alphabet-Wort-Modelle), um gerade vor diesem Hintergrund die unterschiedlichen Strukturen unterscheiden zu können. Dennoch ist dieser Ansatz erfahrungsgemäß nur bedingt erfolgreich, da eine Zuordnung zu einem Aufgabentyp den schrittweisen Aufbau eines Isomorphismus notwendig macht, wobei i. allg. schon unterwegs durch paralleles Anwenden von *Grundstrategien* das Ergebnis nebenbei abfällt, bevor es aus der zum Typ gehörenden Formel (die ja vielleicht vergessen wurde) als Spezialfall hergeleitet werden könnte. Hinderlich ist zusätzlich die trotz Normung (vgl. Borges [4,5]) immer noch anzutreffende Bezeichnungsvielfalt.

Isomorphie als Konzept erweist sich noch in anderer Hinsicht als listig und hinterhältig. Bereits Hefendehl-Hebeker/Törner [16] haben auf die Schwierigkeiten hingewiesen, daß die Mathematisierung von kombinatorischen Figuren über eine stereotype Mustererkennung hinausgeht. Syntaktisch gleiche Aufgaben brauchen wie etwa in der „Drei-Satz-Didaktik" nicht mathematisch isomorphe Strukturen zu repräsentieren; man vergleiche z. B.

(3) Auf wieviele Arten können 12 Studenten eine Klausur schreiben, wenn 3 verschiedene Themen zur Verfügung stehen und je 4 Studenten das gleiche Thema bearbeiten?

(4) Wieviel Möglichkeiten gibt es, 12 Sportler in 3 Mannschaften A_1, A_2, A_3 mit je 4 Spielern aufzuteilen?

Während im ersten Fall es sehr wohl (für den Prüfungskandidaten) von Bedeutung ist, welche Klausur seine Studentengruppe zu bearbeiten hat, trägt der Name der jeweiligen Mannschaft nichts zum Erfolg des Turniers bei.

Ähnlich verhält es sich mit den folgenden Aufgaben:

(5) Auf wieviele Arten können 7 Mädchen einen Tanzreigen bilden?

(6) Auf wieviele Arten lassen sich 7 verschiedene Perlen auf eine Halskette aufreihen?

Man vergleiche auch die beiden folgenden Aufgaben:

(7) Wieviel höchstens sechsstellige Kunstwörter gibt es?

(8) Wieviel höchstens sechsstellige Dualzahlen gibt es?

Zunächst löst das Wort „höchstens" beim Schüler einen eingeübten Reiz aus: Hier muß eine Fallunterscheidung vorgenommen werden; evtl. ist zur Komplementmenge überzugehen. Und so ergibt sich im Falle von (7) $26 + 26 \cdot 26 + \ldots + 26^6$. Im Prinzip läßt sich auch (8) über Fallunterscheidungen lösen, nur hier muß man sorgfältiger zählen. Einfacher wird es, wenn man sich überlegt, daß man aus *inhaltlichen* Gründen in (8) das Wort „höchstens" streichen kann, dafür aber Nullanfänge zuläßt und es ergibt sich als Anzahl 2^6.

Die Beispiele zeigen, daß eine mathematische Isomorphie tiefer liegt als die vordergründige syntaktische.

So wird erklärlich, warum dieses vielschichtige Problem mit der Isomorphie im Unterricht vielleicht eher am Rande angesprochen wird, auf jeden Fall aber als fundamentales Fehlermuster sichtbar wird. Meist wird erst von der Gleichheit numerischer Ergebnisse auf die Isomorphie von unterschiedlichen Konfigurationen geschlossen, z. B. erfahrungsgemäß bei einer Aufgabe aus Engel [10], S. 36:

(9) In einem Zimmer gibt es 8 Lampen, die unabhängig voneinander ein- und ausgeschaltet werden können. Wie viele Beleuchtungsarten gibt es?

(10) Ich habe 8 Münzen von verschiedenem Wert. Auf wieviel Arten kann ich sie auf zwei Taschen verteilen? Auf wieviel Arten kann man davon Trinkgeld geben?

Gleiches wird von Freudenthal [14], S. 531 im Zusammenhang mit der *Geburtstagsaufgabe* diskutiert:

(11) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für eine Person, am 12. Juli geboren zu sein?

(12) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben?

Hier läßt vielfach auch erst die numerische Gleichheit $365/365 \cdot 1/365 = 1/365$ aufmerken.

Ohne auf die Geschichte der Kombinatorik (vgl. Biggs [3]) einzugehen, kann festgestellt werden, daß die Schwierigkeiten mit einem naheliegenden Verständnis von Isomorphie auch historisch nachweisbar sind:

Genaugenommen stand an der Wiege der Kombinatorik bzw. der Stochastik ein Mißverständnis von Isomorphie, in dem Chevalier de Méré es als offensichtlich erachtete, daß „*wenigstens eine Sechs in vier Würfen mit einem Würfel*" der kombinatorischen Figur „*wenigstens eine Doppelsechs in 6 × vier Würfen mit einem Doppel-Würfel*" entspricht. Auch das *Teilungsproblem* (vgl. Freudenthal [14], S. 529), das sog. *problème des parties*, bei dem der mögliche Ausgang eines vorzeitig abgebrochenen Spiels zu gewichten ist, stellt im Kern die Frage nach einer isomorphen Konstellation unter anderen Parametern dar.

2.2 *Unterrichtliche Anregungen*

2.2.1 Isomorphie bei Zufallsprozessen

Knüpfen wir noch einmal an die Geburtstagsaufgabe an, so sei gesagt, daß vielfach explizite oder implizite Lotterien, etwa das willkürliche Auswählen einer Person, auf deren Geburtsdatum man sich dann (o. B. d. A. = ohne Beschränkung der Allgemeinheit, wie der Mathematiker zu sagen pflegt) bezieht, den Weg zu einer Isomorphie weisen. Pickert pflegte in solchen Kontexten gern Goethe (Faust I, Vers 1412) zu zitieren: *Das erste steht uns frei, beim zweiten sind wir Knechte!* Dieses Prinzip verursacht allerdings auch psychologische Schwierigkeiten: Man verteile aus fünf Büchern an die Schüler Klaus, Petra, Jörg je ein Buch. Hierbei äußern Schüler manchmal, daß die Ziehungsbedingungen für Jörg ungünstiger als für Schüler Klaus seien, weshalb eine vollständige Fallbeschreibung andere Ziehungsreihenfolgen ebenfalls zu berücksichtigen haben. Erst die vollständige Auflistung aller Verteilungen räumt das Mißverständnis aus. (In [16] wird von psychologischen Scheineinengungen gesprochen.)

In mathematischer Hinsicht führen unterschiedliche Numerierungen, Bezeichnungen oder das Anwenden von Permutationen zu isomorphen Konfigurationen. Solche Verfahren sollten als wichtige Hilfsprinzipien bewußt thematisiert werden. Dabei geht es um die Zuhilfenahme von Permutationen zum Erzeugen von Isomorphismen. Unterrichtliche Erfahrungen zeigen, daß diese Schemata für Schüler nicht von vornherein trivial sind, es stellt für Sekundarstufen-I-Schüler eine Erkenntnis dar, daß n-maliges Würfeln bei fortlaufendem Protokollieren dem einmaligen Wurf mit n unterscheidbaren Würfeln entspricht. Ein Beispiel ist das von mir gern als *Spiegel-* bzw. *Permutationsprinzip* bezeichnete Schema, vgl. etwa die Anwendung im nächsten Kontext. Ausführlich spricht sich dabei Freudenthal [14], S. 539, gegen ein Argumentieren im folgenden Sinn bei der Frage aus, weshalb die Augensumme 10 beim Drei-Würfel-Wurf gleichwahrscheinlich mit der Augensumme 11 ist. Nun sind ja die Augen auf einem Würfel i. allg. derart verteilt, daß gegenüberliegende Seiten den Summenwert 7 liefern. Ist nun $x + y + z = 10$, so konstatiert ein unter dem Glastisch liegender Beobachter $21 - (x + y + z)$, also den Wert 11; daher sind 10 und 11 als Augensummen gleichwahrscheinlich. Freudenthal sagt nun: Dieses Umdrehen ist so gut wie das Argument: wenn $x^3 - 3x + 2 = 0$ und die Erde rund ist, so ist $x = 1$ oder $x = 2$. In diesem Zusammenhang läßt er dann den Leser mit der analogen Frage für Etrusker-Würfel allein, dessen Seitenflächenpaare mit 1,2 bzw. 3,4 bzw. 5,6 belegt sind.

Freudenthal hat recht als Mathematiker und tut trotzdem dem Didaktiker unrecht. Hier greift, wie ich meine, das Isomorphieargument vorzüglich. Zweifelsohne ist der Zufallsgenerator Normwürfel isomorph zum 6er-

Glücksrad, das gleiche können wir für den Etrusker-Würfel behaupten. Die *Transitivität dieser Isomorphie* liefert dann die Rechtfertigung der obigen Aussage, weil unsere Argumentation vortrefflich den Eigenarten des Normwürfels angepaßt ist. Zugleich leuchtet aber auch ein, daß unsere Fragestellung unabhängig ist von der Augenverteilung. Isomorphe Konfigurationen sind somit einerseits zwar gleichartig, im jeweiligen Kontext evtl. aber unterschiedlich adäquat zur vorgelegten Fragestellung. Dies gilt es, geschickt auszunutzen.

2.2.2 Bevorzugen von Isomorphie-freundlichen Begriffsbildungen

Verkürzend kann man die schulrelevante abzählende Kombinatorik als eine Art eines höheren 1×1 bezeichnen, wofür „neue" Zahlen und „neue" Zählverfahren bereitgestellt werden. Man denke zunächst an die *Binomialkoeffizienten* (manchmal auch *Pascal-Zahlen* genannt) bzw. die *Fakultäten*, findet dann aber in Lehrbüchern zahlreiche spezielle Zahlen(folgen), die zumeist inhaltlichem Kontext erwachsen sind: *Fibonacci-Zahlen, Rencontre-Zahlen, Ménage-Zahlen, Stirling-Zahlen, Catalan'sche Zahlen, Alkohol-Zahlen* usw. Solchen Zahlen, z. B. $\binom{n}{k}$, sollte eine Eigenständigkeit zuerkannt werden, d. h. $\binom{n}{k}$ nicht schlechthin als Abkürzung für den Term $n!/(k!(n-k)!)$ angesehen werden. Dieser Aspekt ist überdies in mnemotechnischer Hinsicht bedeutsam, weil inhaltliche Bedeutungen, z. B. $\binom{n}{k}$ als Anzahl der k-Teilmengen einer n-Menge, vielfach sicherer gespeichert werden als eine willkürlich erscheinende Formel. In dieser inhaltlichen Verankerung liegt auch die Möglichkeit einer formelmäßigen Rekonstruktion.

Für die Binomialkoeffizienten findet man mittlerweile in den meisten Schulbüchern die bekannten weittragenden Interpretationen aus isomorphen Konfigurationen, z. B. $\binom{n}{k}$ als Anzahl der n-stelligen (0,1)-Folgen mit k Einsen bzw. als Wegeanzahl in einem Gitternetz, wobei die Weglänge n beträgt und genau k Nord-Abweichungen zugelassen sind. Allerdings schreckt man unverständlicherweise vielfach davor zurück, diese nachträglichen Interpretationen im vorhinein als Definition zuzulassen, zumal in der elementaren Kombinatorik die Kluft zwischen Anschauung und Begriff (vgl. Winter [35], S. 198) weitgehend unproblematisch ist.

Diese Interpretationen zeigen aber auch eine Barriere auf, die überwunden werden muß und die nur auf den ersten Blick widersprüchlich erscheint: Einerseits beschreiben die Binomialkoeffizienten eine typisch ungeordnete Situation (*Teilmengen* einer Menge), auf der anderen Seite repräsentiert $\binom{n}{k}$ Informationen über gewisse (0,1)-*Folgen*, wobei hier die Elemente vektoriell anzusehen sind.

2.2.3 Isomorphie als Beweisheuristik bzw. als Hilfsmittel zur Satzfindung

Hat man die Grundelemente der Kombinatorik auch inhaltlich verankert, so tragen diese Isomorphismen vielfach weiter. Allgemein bekannt und in gewisser Weise offensichtlich ist die inhaltliche Rechtfertigung der Summenformel $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n$ über das Zählen von i-Teilmengen einer n-Menge. Schon oft propagiert (vgl. z. B. Polya [27], S. 120–123) wurde die Begründung $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}$ über aneinanderzusetzende Wege in einem Gitternetz. Gleiches gilt etwa für die bekannte Summenformel für die Binomialkoeffizienten $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}$.

Ebenfalls einfach durch algebraische Umformungen zu beweisen ist die Identität $\binom{k}{m}\binom{t}{k} = \binom{t}{m}\binom{t-m}{t-k}$ mit $m \leqq k \leqq t$. *Warum*-man beachte, daß sich die Sinnfrage im herkömmlichen Kontext gar nicht stellt – diese Formel aber richtig ist, hat man dadurch noch nicht verstanden. Hier hilft wieder die Interpretation der Binomialkoeffizienten als Teilmengenanzahlen weiter: Seien A, B beliebige Teilmengen von C mit $|A| = k$, $|B| = m$, $|C| = t$ und $B \subseteq A \subseteq C$, so ist

$$\begin{aligned}\binom{k}{m}\binom{t}{k} &= |\{(A, B) \mid B \subseteq A, |A| = k, |B| = m\}| \\ &= |\{(B, A) \mid A \supseteq B, |A| = k, |B| = m\}| \\ &= |\{(B^c, A^c) \mid A^c \subseteq B^c, |A^c| = t-k, |B^c| = t-m\}| \\ &= \binom{t}{t-m}\binom{t-m}{t-k} = \binom{t}{m}\binom{t-m}{t-k}.\end{aligned}$$

Meines Erachtens kann die Wintersche Forderung ([35], S. 200) nicht oft genug wiederholt werden.[1]

Ein anspruchsvolleres Beispiel sei hier nur kurz skizziert. *Catalan'sche Zahlen* $C(n)$ beschreiben die Anzahl möglicher (binärer) Klammerungen eines n-stelligen Terms bei einer nicht-assoziativen Multiplikation. Sie lassen sich explizit über die Formel $C(n) = 1/n\binom{2n-2}{n-1}$ für $n = 1, 2, 3 \ldots$ angeben. Desgleichen liefert $C(n) = \Sigma_{k=1}^{n} C(k)C(n-k)$ für $n = 2, 3, \ldots$ mit den Anfangsbedingungen $C(0) = 0$, $C(1) = 1$ eine in vielen Fällen hilfreiche rekursive Darstellung.

Im Lehrbuch von Brualdi [6] findet man den formal richtigen, aber mühsamen Beweis, daß die *Anzahl der Triangulisierungen* eines konvexen $n+1$-seitigen Polygons durch $C(n)$ beschrieben wird. Die Aufgabe stellte der Mathematiker Euler 1751 dem Mathematiker Goldbach (vgl. Dörrie [9], S. 20f). Dort schließt man von der Gleichheit der Rekursionsformeln auf die Gleichheit der Anzahlen. Der mittlerweile sensibel gewordene Didaktiker fragt sich: Läßt sich diese Gleichwertigkeit verstehen? oder besser: Kann man einen inhaltlich beschreibbaren Isomorphismus angeben?

Betrachtet man ein n-stelliges Produkt, so stehen $n+1$ Plätze für eine, gegebenenfalls für mehrere Klammern zur Verfügung. Numeriert man nun die Polygonecken mit 1 bis $n+1$, so zeichnet jede Triangulisierung gewisse Diagonalen aus. Jede Diagonale läßt sich aber als „Klammer auf", „Klammer zu" umschreiben. Fertig. Gewiß, man mag einwenden, hier werden verschiedene Schwierigkeiten großzügig ignoriert. Natürlich wird der formale Beweis in letzter Konsequenz nicht überflüssig, dennoch lieferten *mir* diese wenigen Überlegungen mehr Einsicht in das Ergebnis als drei Seiten im Buch von Brualdi ([6], S. 142–144).

Gleichsam als Herausforderung empfindet man dann weitere Interpretationen dieser Zahlen:

(13) $C(n)$ beschreibt die möglichen direkten Wege im Gitternetz, die von (0,0) nach (n,n) führen und echt unter der Diagonalen im Gitternetz bleiben (siehe Scheid [30]).

Hier ist der Übersetzungsmechanismus nicht in gleicher Weise auf der Hand liegend. Der Vollständigkeit halber erwähnen wir auch

(14) Zwei Kandidaten A und B erhalten bei einer Stimmauszählung je $n-1$ Stimmen. Dann gibt es genau $C(n)$ verschiedene Reihenfolgen der Stimmauszählung derart, daß der Kandidat A während der Stimm-

---

[1] Wir sollten die Forderung nach Wissenschaftsorientierung des Unterrichts nicht preisgeben. Diese ist nicht zulänglich definiert als eine Vermittlung von elementarisierten Teilen der Universitätswissenschaft. Wesentlicher ist die mit der Wissenschaftsorientierung verknüpfte Haltung der Suche nach Wahrheit und Sinn: *mit eigenen Augen sehen, mit eigenem Verstand urteilen, klar sprechen und auf Verständlichkeit bestehen.*

auszählung nie weniger Stimmen hat als der Kandidat B (Halder; Heise [15], S. 118 bzw. Jacobs [17], S. 253).

(15) A regular $2n$-gon is inscribed in a circle. In how many ways is it possible to join its vertices in pairs so that the resulting segments do not intersect one another? (Vilenkin [33], S. 125) Antwort: $C(n+1)$

(16) In how many ways is it possible to line up 2n people of different height in 2 rows of n people each so that the people in each row are lined up according to height and the person in the first row is invariably taller than his counterpart in the second row? (Vilenkin [33, S. 61])

Die obigen Bemerkungen machen deutlich, daß fachwissenschaftlich befriedigend beantwortete Fragen für den Didaktiker nicht notwendig ausdiskutiert sein müssen. Dabei steht nicht eine *Elementarisierung* schlechthin im Vordergrund, sondern auch das Bemühen, die *Sinnfrage* befriedigender zu beantworten. Es versteht sich dann von selbst, daß kombinatorische Identitäten stets als Herausforderungen wirken. Ein Beispiel der Selbstreflexion während der Vorbereitung einer fachwissenschaftlichen Kombinatorik-Vorlesung auf der Grundlage des Ryser-Buches [29] ist die folgende Aussage: In [29], S. 33, wird der folgende Satz über vollständige Induktion bewiesen:

(17) Lemma 2.2: Let $f(n, k)$ denote the number of ways of selecting k objects, no two consecutive from n objects arranged in a row. Then $f(n, k) = \binom{n-k+1}{k}$.

Wie man $f(n, k)$ zunächst findet, läßt sich natürlich nicht dem Beweis entnehmen. Nach geraumer Zeit entsinnt man sich an einen methodischen Kunstgriff, d. h. an einen eleganten Isomorphismus, (siehe Kirsch [22]), die k-Repetitionen einer n-Menge (Ziehen mit Zurücklegen ohne Notieren der Reihenfolge) geeignet zu repräsentieren und abzuzählen. Dabei „setzt" man eine Stichprobe (in der Standardreihenfolge) auf eine von 0 bis $k-1$ ansteigende Treppe, wodurch mehrfach auftretende gleiche Zahlen entzerrt werden. Zum Schluß ist das Problem auf die Anzahlbestimmung einer k-Menge aus einer $n+k-1$-Menge zurückgeführt. Die Zusatzbedingung in dem Ryser-Lemma, daß keine zwei benachbarten Zahlen gezogen werden dürfen, gestattet es nun, die Stichproben auf eine von 0 bis $-(k-1)$ absteigende Treppe zu setzen, wodurch die Stichproben den k-Mengen einer $n-k+1$-Menge entsprechen. Damit wird das Ergebnis $\binom{n-k+1}{k}$ im eigentlichen Sinne sinnvoll.

2.2.4 Runde-Tisch-Aufgaben versus Lange-Bank-Aufgaben

Beim Durchblättern von Aufgabensammlungen der Kombinatorik für den Mathematikunterricht fallen dem Leser insbesondere zwei Muster auf, die „Ehepaar-Aufgaben" – hier geht es um das Zählen unter Berücksichtigung von verbotenen Konfigurationen

(18) Ein junges Ehepaar hat zur Einweihung seiner Wohnung acht Gäste eingeladen. Die Sitzverteilung an ihrem runden Tisch wird verlost. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Gastgeber nebeneinander sitzen?

und Runde-Tisch-Aufgaben – hier gilt es, auf äquivalente Konfigurationen im Hinblick auf eine Permutationsgruppe zu achten.

(19) An einem runden Tisch sitzen fünf Damen und drei Herren. Auf wieviel Arten könnten sich die Herren zwischen die Damen setzen, wenn grundsätzlich keine Herren nebeneinander sitzen sollen?

(20) Eine Scheibe mit acht Sektoren ist zweifarbig (rot, grün) zu färben. Die drei roten Sektoren dürfen dabei nicht aneinandergrenzen. Auf wieviel Arten kann man die Scheibe färben?

Letzter Aufgabentyp führt zur sog. Polyaschen Abzähltheorie, welche vielfältige relevante Anwendungen besitzt (z. B. das Zählen von Isomeren in der Chemie). Diese Runde-Tisch-Aufgaben haben vielfach eine Lange-Bank-Parallelaufgabe, vgl. etwa die naheliegenden linearen Analoga der Aufgaben (5) und (6).

Oft sind auch die zugehörigen linearen Aufgaben leichter zu bewältigen; es stellt sich daher die Frage, inwieweit über deren Lösung das neue Problem zu erschließen ist. Wiederum handelt es sich um die Frage nach einem Isomorphismus, der zumeist inhaltlich beschreibbar ist. Im Zusammenhang mit der Aufgabe (5) mögen die Mädchen im Tanzreigen auf ein Signal (implizite Lotterie!) hin stehenbleiben. Bei dem mir am nächsten stehenden Mädchen „wickele" man die Kreisreihenfolge gegen den Uhrzeigersinn auf. Folglich gibt es $(n-1)!$ Anordnungen. Man beachte, daß bei (6) im Unterschied zu (5) noch die Oben-Unten-Symmetrie der Kette (Klappung) zusätzlich zu berücksichtigen ist.

Bei der Aufgabe (18) führt ebenfalls das „Aufschneiden" der Tischordnung am Platz des Gastgebers zu einem linearen Problem und die Wahrscheinlichkeit berechnet sich zu $2{\cdot}8!/9!$. *Aufschneiden, Verknoten, Numerieren, Auszeichnen und Weglassen* sind somit vielfach Schemata, hinter denen sich Isomorphismen verbergen.

2.2.5 Eine Bemerkung für Schulbuchautoren

Vielfach wird geklagt, daß die Aufgaben in der Kombinatorik künstlich seien (siehe näheres in [16]). Danckwerts u. a. [8], aber auch die empfehlenswerte Aufgabensammlung von Vilenkin [33] arbeiten zumeist bewußt mit künstlichen Einkleidungen. Vermutlich sind dem Lernenden eigentlich nur die künstlich-realistischen Aufgaben zuwider, die weder „kalt" noch „warm" sind, die leider zu dem stereotypen Image der Mathematik beitragen. Ich meine, die Lehrbuchautoren könnten sich mit ein wenig Mühe dieser lauen Aufgaben entledigen und sie durch *„isomorphe"* ersetzen. Man vergleiche die Wirklichkeitsnähe der beiden isomorphen Aufgaben:

(21) Unter zehn verschiedenen Büchern befinden sich drei Taschenbücher. Die Bücher werden in ein Regal gestellt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stehen die drei Taschenbücher nebeneinander?

(22) Bei einem 100-m-Lauf starten acht Läufer, unter denen sich zwei Läufer desselben Vereins befinden. Die Startplätze werden ausgelost. Mit welcher Wahrscheinlichkeit starten die Läufer desselben Vereins nebeneinander?

oder auch

(23) Eine Stahlkette zur Kräfteübertragung besteht aus 25 Kettengliedern, von denen aus Versehen vier geringfügige Toleranzen aufweisen. Erst wenn wenigstens drei sich nebeneinander befinden, ist die Funktionstüchtigkeit der Kette eingeschränkt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich die vier falschen Glieder nebeneinander?

(24) Unter 20 Perlen befinden sich drei unechte, die sich jedoch durch bloßes Aussehen von den echten nicht unterscheiden lassen. Die 20 Perlen wurden in zufälliger Reihenfolge zu einer Kette aufgezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich die drei falschen Perlen nebeneinander befinden?

oder siehe auch die Aufgaben in [16], S. 259 f.

3. Zusammenfassung

Insgesamt ist damit wohl deutlich geworden, daß es mir nicht daran gelegen ist, das Begriffsvokabular der Kombinatorik um einen weiteren Terminus zu erweitern. Kombinatorik wird in der Regel *aufgabenorientiert*, zum Teil auch *problemorientiert* unterrichtet, kaum wohl theorieorientiert dargeboten, d. h. der Schüler hat fortwährend Übersetzungsaufgaben zu bewältigen. Bei einem solchen Zugang erleichtern zweifelsohne isomorphieoffene Begriffsbildungen die Mathematisierungsschritte und verhindern, daß das Standardisieren von Lösungsschemata zu einer Verengung der Sichtwechsel führt. Dabei ist das Isomorphiekonzept auch von *heuristischer Bedeutung.* Gleichzeitig wirkt das Konzept der Isomorphie in den üblichen Aufgabenplantagen integrativ, eine Reflexion darüber ist allerdings bereits die zweite Stufe eines Mathematisierungsprozesses.

4. Literatur

[1] ALTHOFF, H.: Wieviel Kombinatorik benötigt man in einem Grundkurs Stochastik? – In: MU 30 (1984) H. 1, 94–99

[2] ANDERSON, I.: A First Course in Combinatorial Mathematics. – Oxford: Clarendon Press, 1974

[3] BIGGS, N. L.: Roots of Combinatorics. – In: Historia Mathematica 6 (1979), 109–136

[4] BORGES, R.: Ein Vorschlag zur Normung der Namen der kombinatorischen Grundbegriffe in DIN 1302. – In: PM 21 (1979), 43–45

[5] BORGES, R.: Die Begriffe der Kombinatorik in der Neuausgabe von DIN 1302. – In: PM 23 (1981), 148–151

[6] BRUALDI, R. A.: Introductory Combinatorics. – New York: North-Holland, 1977

[7] DANCKWERTS, R.; VOGEL, D.: Kombinatorik. – In: MU 29 (1983) 5

[8] DANCKWERTS, R.; VOGEL, D.; BOVERMANN, K.: Elementare Methoden der Kombinatorik. – Stuttgart: Teubner, 1985

[9] DÖRRIE, H.: Triumph der Mathematik. – Würzburg: Physica, 1958

[10] ENGEL, A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Band 1. – Stuttgart: Klett, 1973

[11] ENGEL, A.: Das Training der Deutschen IMO-Mannschaft. – In: MU 25 (1979) H. 1, 8–10

[12] FELLER, W.: An Introduction to Probability Theory and its Applications. Vol. 1. – New York: J. Wiley and Sons, 1968

[13] FREUDENTHAL, H.: Wahrscheinlichkeit und Statistik. – München: Oldenbourg, 1968

[14] FREUDENTHAL, H.: Mathematik als pädagogische Aufgabe. Band 2. – Stuttgart: Klett, 1973

[15] HALDER, H. R.; HEISE, W.: Einführung in die Kombinatorik. – München: Hanser, 1976

[16] HEFENDEHL-HEBEKER, L.; TÖRNER, G.: Über Schwierigkeiten bei der Behandlung der Kombinatorik. – In: DdM 12 (1984), 245–262

[17] JACOBS, K.: Einführung in die Kombinatorik. – Berlin: Walter de Gruyter, 1983

[18] JEGER, M.: Einführung in die Kombinatorik. Band 1. – Stuttgart: Klett, 1973

[19] JEGER, M.: Beispiele zum Auflisten von kombinatorischen Figurenmengen. – In: MU 30 (1984) H. 1, 47–71

[20] JEGER, M. R.; INEICHEN, R.: Kombinatorik, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung; Aufgabensammlung. – Zürich, 1971

[21] KAPUR, J. N.: Combinatorial Analysis and School Mathematics. – In: Educ. Stud. Math. 3 (1970), 111–127

[22] KIRSCH, A.: Eine moderne und einprägsame Fassung der kombinatorischen Grundaufgaben. – In: DdM 1 (1973) H. 2, 113–130

[23] LÜNEBURG, H.: Kombinatorik. – Basel: Birkhäuser, 1971

[24] NIVEN, I.: Mathematics of Choice. How to count without counting. – Washington: Mathematical Association of America, 1965

[25] PERKO, R.: Bemerkungen zur marginalen Rolle der elementaren Rolle der elementaren Kombinatorik in der Realität des AHS-Unterrichts. – In: Stochastik im Schulunterricht – Beiträge zum 3. internationalen Symposium für Didaktik der Mathematik DÖRFLER, W.; FISCHER, R. (Hrsg.). Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1980, S. 141–154

[26] PICKERT, G.: Einführung in die endliche Geometrie. – Stuttgart: Klett, 1974

[27] POLYA, G.: Vom Lösen mathematischer Aufgaben I. – Basel, 1966, S. 120–123

[28] POLYA, G.; TARJAN, R. E.; WOODS, D. R.: Notes on Introductory Combinatorics. – Boston: Birkhäuser, 1983

[29] RYSER, H. J.: Combinatorial Mathematics. Mathematical Association of America. – New York: Academic Press, 1963

[30] SCHEID, H.: Ein Plädoyer für die Kombinatorik. – In: MU 30 (1984) H. 1, 6–32

[31] STEIBL, H.: Exemplarische Entwicklung der kombinatorischen Grundformeln. – In: MU 30 (1984) H. 1, 33–64

[32] STRICK, H. K.: Kombinatorik auf dem elektronischen Rechner. – In: MU 30 (1984) H. 1, 86–93

[33] VILENKIN, N. Y.: Combinatorics. – New York: Academic Press, 1971

[34] VOLLRATH, H. J.: Zur Beziehung zwischen Begriff und Problem in der Mathematik. – In: JMD 7 (1986) H. 4, 243–268

[35] WINTER, H.: Über die Entfaltung begrifflichen Denkens im Mathematikunterricht. – In: JMD 4 (1983) H. 3, 175–204

Begriffsbildung als schöpferisches Tun im Mathematikunterricht

Herrn G. Pickert zum 70. Geburtstag gewidmet

Hans-Joachim VOLLRATH, Würzburg

Abstract: Mathematics instruction suffers from a shortness of opportunities for the students to be really creative. Mathematical contents and methods are well established. Therefore the students are only able to re-create or to re-discover mathematics. This paper suggests to give the students a possibility for creative work in concept formation activities. It shows topics and ways for creating new concepts in different areas of school mathematics. Examples are given for defining new numbers, operations, functions, and geometrical figures. Typical questions are listed to stimulate investigations about the new defined concepts.

Kurzreferat: Im Mathematikunterricht gibt es zu wenig Möglichkeiten für Schüler, kreativ zu werden. Mathematische Inhalte und Methoden stehen fest. Von daher können die Schüler Mathematik nur wieder-entdecken. Dieser Beitrag zeigt Möglichkeiten kreativen Arbeitens bei der Bildung von Begriffen auf. Dies wird anhand von Beispielen aus verschiedenen Bereichen der Schulmathematik dargestellt: Definition neuer Zahlen, Operationen, Funktionen und geometrischer Figuren. Typische Fragen, die die Schüler zur Untersuchung der neu definierten Begriffe anregen sollen, werden angegeben.