Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zur Differentialgeometrie 1

Blatt 1

Aufgabe 1. (12 Punkte)

Sei $\times$ das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

a) $|a \times b|^2 = \begin{vmatrix} |a|^2 & a \cdot b \\ a \cdot b & |b|^2 \end{vmatrix}$.

b) Für differenzierbare Kurven $a, b : (0,1) \to \mathbb{R}^3$ gilt die Produktregel:

$$\frac{d}{dt}\left[a(t) \times b(t)\right] = \left(\frac{da}{dt}\right) \times b + a \times \left(\frac{db}{dt}\right).$$

Aufgabe 2. (12 Punkte)

a) Sei $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$ eine Ebene. Zeigen Sie: der Abstand von E zum Nullpunkt beträgt $\dfrac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

b) Zeigen Sie: Zwei Ebenen $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d\}$ und $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : Ax + By + Cz = D\}$ sind genau dann parallel, wenn

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

c) Zeigen Sie: Die Ebene $ax + by + cz = d$ und die Gerade

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$$

sind genau dann parallel, falls

$$an_1 + bn_2 + cn_3 = 0.$$

b. w.

Aufgabe 3. (12 Punkte)

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ und $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve der Klasse C^1. Gegeben sei ferner eine Zerlegung $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$ des Intervalls $[a, b]$. Die Länge des zugehörigen Polygonzuges P sei durch $L(P) := \sum\limits_{i=1}^{N} |\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})|$ definiert. Zeigen Sie: Geht die Feinheit der Zerlegung gegen Null, d. h. $\max\limits_i |t_i - t_{i-1}| \to 0$, so gilt

$$L(P) \to \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt.$$

Aufgabe 4. (12 Punkte)

a) Berechnen Sie den Umfang eines Kreises mit Radius R in $\mathbb{R}^2$.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius R in $\mathbb{R}^2$

   i) mithilfe des Transformationssatzes und Polarkoordinaten

   ii) durch Anwendung des Greenschen Satzes.

c) Sei $\alpha(t) = (t, \cosh t)$, $t \geq 0$. Skizzieren Sie $\alpha([0, 2])$ und berechnen Sie die Bogenlänge von $\alpha(t)$.

Abgabe: Mo, 31.10.2016 in der Übung.

Die erste Übung findet am Montag, den 24.10.2016 statt.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!