

Übungen zur Differentialgeometrie 1

Blatt 10

Aufgabe 37. (12 Punkte)

- a) Berechnen Sie die Christoffelsymbole zweiter Art für eine orthogonale Parametrisierung, d. h. $F = 0$. Zeigen Sie ferner, dass für die Gaußkrümmung gilt:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right\}.$$

- b) Zeigen Sie, dass in konformen Parametern, d. h. $E = G = \lambda(u, v)$ und $F = 0$, gilt:

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \ln(\lambda).$$

- c) Zeigen Sie: Gilt $E = G = e^\lambda$ und $F = 0$, so gilt

$$\Delta \lambda + 2K e^\lambda = 0.$$

Aufgabe 38. (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $g = \det(g_{ij})$ die Gleichungen

$$\frac{\partial \ln(g)}{\partial u^k} = g^{ij} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial u^k} = 2g \Gamma_{lk}^l$$

gelten.

Aufgabe 39. (12 Punkte)

Gibt es reguläre Flächen mit

- a) $E = G = 1, F = 0$ und $e = 1, f = 0, g = -1$?
 b) $E = 1, F = 0, G = \cos^2 u$ und $e = \cos^2 u, f = 0, g = 1$?

b. w.

Aufgabe 40. (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Umkehrung des Theorema egregium falsch ist, d. h. konstruieren Sie zwei reguläre Flächen mit gleicher Gaußkrümmung, die nicht isometrisch sind.

Abgabe: Mo, 16. Januar 2017 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!