Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zur Differentialgeometrie 1

Blatt 11

Aufgabe 41. (12 Punkte)

Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ ($I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall) eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Krümmung $k > 0$. Betrachten Sie die *Röhre*

$$X : I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ X(s,\varphi) := \alpha(s) + r\big(n(s)\cos(\varphi) + b(s)\sin(\varphi)\big).$$

Der Radius $r > 0$ sei so klein gewählt, dass $r < \dfrac{1}{k(s)}$ für alle $s \in I$.

a) Berechnen Sie unter der Annahme, dass X eine reguläre Fläche ist, die Koeffizienten der ersten Fundamentalform von X.

b) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der Röhre durch $2\pi r L$ gegeben ist, wobei L die Länge von α bezeichnet.

Aufgabe 42. (12 Punkte)

Betrachten Sie das Möbiusband

$$X(t,\theta) = \left(\left(1 - t\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta, \left(1 - t\sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta, t\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

mit $(t,\theta) \in U := \{(t,\theta) \in \mathbb{R}^2; -\frac{1}{2} < t < \frac{1}{2}, 0 < \theta < 2\pi\}$.
Berechnen Sie die Gaußkrümmung des Möbiusbandes auf der Menge $\{t = 0\}$.

Aufgabe 43. (12 Punkte)

Eine reguläre Fläche $X(u,v)$ habe die erste Fundamentalform $E = \cos^2 v$, $F = 0$, $G = 1$ sowie die zweite Fundamentalform $e = -\cos^2 v$, $f = 0$, $g = -1$.

Zeigen Sie, dass diese Fläche in einer Sphäre vom Radius 1 enthalten ist.

b. w.

Aufgabe 44. (12 Punkte)

Betrachten Sie die Drehfläche

$$X : I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3 \quad X(t,\varphi) := \begin{pmatrix} r(t)\cos\varphi \\ r(t)\sin\varphi \\ h(t) \end{pmatrix}$$

mit $r(t) > 0, h'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ aus Aufgabe 23.

Berechnen Sie die Christoffelsymbole zweiter Art für diese Fläche.

Abgabe: Mo, 23. Januar 2017 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!