Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zur Differentialgeometrie 1

Blatt 13

Aufgabe 49. (12 Punkte)

a) Sei $X(u,v) = \big(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)\big)$ eine Rotationsfläche mit der Eigenschaft, dass jeder Breitenkreis $\{v = const.\}$ eine Geodäte auf X ist. Um welche Fläche handelt es sich?

b) Seien P und Q zwei unterschiedliche Punkte auf einem Zylinder $X(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$. Zeigen Sie, dass es entweder zwei oder unendlich viele Geodäten auf X gibt, die durch P und Q laufen. Wie müssen P und Q liegen, sodass es genau zwei Geodäten gibt, die durch P und Q laufen?

Aufgabe 50. (12 Punkte)

a) Seien S_1 und S_2 zwei reguläre Flächen und $f : S_1 \to S_2$ eine Isometrie. Zeigen Sie: Ist $\alpha(t)$ eine Geodäte in S_1, so ist $f\big(\alpha(t)\big)$ eine Geodäte in S_2.

b) Für die erste bzw. zweite Fundamentalform einer regulären Fläche gelte $F = 0$ und $f = 0$. Zeigen Sie, dass sich die Codazzi-Gleichungen dann als

$$e_v = \frac{E_v}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right) \quad \text{und} \quad g_u = \frac{G_u}{2}\left(\frac{e}{E} + \frac{g}{G}\right)$$

schreiben.

Aufgabe 51. (12 Punkte)

a) Verifizieren Sie die Gauß-Bonnet-Formel

$$\int_T K\, dA = 4\pi(1-p)$$

für einen Rotationstorus $T = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 + \big(\sqrt{x^2+y^2} - a\big)^2 = r^2\Big\}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Parametrisierung
$X(u,v) = \big((r\cos u + a)\cos v, (r\cos u + a)\sin v, r\sin u\big), (u,v) \in (0, 2\pi)^2$.

b) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche mit nicht-positiver Gaußkrümmung. Zeigen Sie, dass es keine einfach zusammenhängenden Geodäten in S geben kann, d. h. es gibt keine geschlossene Geodäte in S, die Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes ist. Wieso steht dies nicht im Gegensatz dazu, dass jede Kreislinie auf einem Zylinder eine Geodäte ist?

b. w.

Aufgabe 52. (12 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für jede geschlossene Fläche S, die homöomorph zu einem Torus ist,

$$\int_S K\,dA = 0$$

gilt. Kann der Fall $K \equiv 0$ eintreten?

b) Zeigen Sie, dass für ein Ellipsoid $\mathcal{E} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \right\}$

$$\int_{\mathcal{E}} K\,dA = 4\pi$$

gilt.

c) Sei S eine zu S^2 homöomorphe geschlossene Fläche. Folgt dann, dass die Gaußkrümmung von S in jedem Punkt positiv ist?

Abgabe: Mo, 06. Februar 2017 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!