Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zur Differentialgeometrie 1

Blatt 2

Aufgabe 5. (12 Punkte)

Sei $\alpha(t)$ eine reguläre, nicht notwendig nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie:

a) Für die Krümmung von $\alpha(t)$ gilt:

$$k(t) = \frac{|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)|}{|\dot{\alpha}(t)|^3}$$

b) Falls die Krümmung nirgends verschwindet, gilt für die Torsion von $\alpha(t)$:

$$\tau(t) = -\frac{\big(\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\big) \cdot \dddot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)|^2}.$$

Aufgabe 6. (12 Punkte)

a) Parametrisieren Sie die Schraubenlinie (Helix)

$$\alpha(t) := \begin{pmatrix} a\cos(t) \\ a\sin(t) \\ bt \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

mit $a, b > 0$ nach Bogenlänge um.

b) Bestimmen Sie Krümmung und Torsion von $\alpha(t)$.

c) Bestimmen Sie mit Hilfe von b) alle Raumkurven mit konstanter positiver Krümmung und konstanter Torsion.

b. w.

Aufgabe 7. (12 Punkte)

a) Sei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve, deren Normalen alle durch einen festen Punkt a gehen. Zeigen Sie: α verläuft auf einem Kreis mit Mittelpunkt a.

b) Sei $\alpha(s)$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^3$ mit nirgends verschwindender Krümmung. Zeigen Sie, dass α genau dann in einer Ebene verläuft, wenn die Torsion verschwindet.

Aufgabe 8. (12 Punkte)

Berechnen Sie $k, \tau, \mathbf{t}, \mathbf{n}$ und $\mathbf{b}$ für folgende Kurven und zeigen Sie, dass die Frenetschen Gleichungen erfüllt sind:

a) $\alpha(t) = \left(\frac{1}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right),\ t \in (-1,1)$

b) $\alpha(t) = \left(\frac{4}{5}\cos(t), 1 - \sin(t), -\frac{3}{5}\cos(t)\right),\ t \in \mathbb{R}.$

Abgabe: Mo, 07.11.2016 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!