Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zur Differentialgeometrie 1

Blatt 3

Aufgabe 9. (12 Punkte)

a) Für eine reguläre Kurve $\alpha(t) = \big(\alpha_1(t), \alpha_2(t)\big)$ im $\mathbb{R}^2$ ist die Krümmung durch

$$k(t) = \frac{\dot\alpha_1 \ddot\alpha_2 - \ddot\alpha_1 \dot\alpha_2}{|\dot\alpha|^3}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass $|k(t)|$ mit dem Ausdruck aus Aufgabe 5) für Kurven im $\mathbb{R}^3$ übereinstimmt. Warum ist es sinnvoll der Krümmung im $\mathbb{R}^2$ ein Vorzeichen zu geben?

b) Leiten Sie eine Formel für die Krümmung des Graphen einer Funktion $t \mapsto f(t)$ her. Prüfen Sie, ob die Extremstelle der Normalparabel $f(t) = t^2$ auch ein Extremum der Krümmung $k(t)$ ist.

Aufgabe 10. (12 Punkte)

Sei $r : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ glatt mit $r(t) > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}$, und $\alpha(t) = \big(r(t)\cos t, r(t)\sin t\big)$.

a) Zeigen Sie, dass hiermit eine bereits *reguläre* Kurve α in $\mathbb{R}^2\backslash 0$ definiert wurde und dass sich deren Krümmung k mittels der Formel

$$k(t) = \frac{2(\dot r)^2 - r\ddot r + r^2}{\big((\dot r) + r^2\big)^{3/2}}(t)$$

berechnen lässt.

b) Benutzen Sie a), um die Krümmung der „Archimedischen Spirale“ α, gegeben durch $r(t) = at$ mit $a > 0$, und der „logarithmischen Spirale“ β, gegeben durch $r(t) = \mathrm{e}^{bt}$ mit $b > 0$, zu berechnen. Wie verhalten sich die Krümmungen dieser beiden Spiralen für $t \to \infty$?

b. w.

Aufgabe 11. (12 Punkte)

a) Berechnen Sie die Krümmung einer Ellipse α, welche durch $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$, für $t \in [0, 2\pi]$ und $a > b > 0$, parametrisiert sei, und vergewissern Sie sich insbesondere darüber, dass deren Krümmung k in allen $t \in [0, 2\pi]$ positiv ist. In welchen und wie vielen Punkten t_j verschwindet deren Ableitung k'?

b) Sei nun allgemeiner Ω ein konvexes Gebiet im $\mathbb{R}^2$, welches von einer regulären, geschlossenen glatten Kurve $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ berandet werde. Beweisen Sie, dass deren Krümmung k in keinem t negativ werden kann.
Hinweis: Betrachten Sie einen beliebigen Randpunkt $\alpha(t)$ von Ω und die durch diesen führende „Stützgerade“ G_t (an $\partial\Omega$), welche von der Tangente $\alpha'(t)$ aufgespannt wird. Nutzen Sie nun, dass Ω vollständig in einer der beiden Halbebenen enthalten ist, in die der $\mathbb{R}^2$ von G_t aufgeteilt wird.

Aufgabe 12. (12 Punkte)

Sei $\alpha(t)$ eine reguläre, nicht notwendig nach Bogenlänge parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $\alpha'(t)$ und $\alpha''(t)$ zu jedem Zeitpunkt t linear abhängige Vektoren sind. Bestimmt solch eine Bedingung bereits die geometrische Gestalt der Kurve α? Wenn ja, welche Form muss α dann haben?

Abgabe: Mo, 14.11.2016 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!