Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zur Differentialgeometrie 1

Blatt 4

Aufgabe 13. (12 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass der Zylinder

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$$

eine reguläre Fläche ist und geben Sie Parametrisierungen an, mit denen er sich vollständig überdecken lässt.

b) Zeigen Sie, dass der Kegel

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}$$

keine reguläre Fläche ist.

Aufgabe 14. (12 Punkte)

Sei $f(x, y, z) := x + y + z - \sin(xyz)$ auf $(-1, 1)^3 \subset \mathbb{R}^3$ gegeben.

a) Wieso lässt sich $f^{-1}(0) \cap B_r^3(0)$, für ein hinreichend kleines $r > 0$, sowohl als Graph einer Funktion $h_1 \in C^\infty(U_1)$ über einer offenen Umgebung U_1 des Punktes $(0, 0)$ aus der (y, z)-Ebene, als auch als Graph einer Funktion $h_2 \in C^\infty(U_2)$ über einer offenen Umgebung U_2 des Punktes $(0, 0)$ aus der (x, z)-Ebene, als auch als Graph einer Funktion $h_3 \in C^\infty(U_3)$ über einer offenen Umgebung U_3 des Punktes$(0, 0)$ aus der (x, y)-Ebene darstellen?

b) Man folgere aus den Relationen $f\big(h_1(y, z), y, z\big) \equiv 0$, $f\big(x, h_2(x, z), z\big) \equiv 0$ und $f\big(x, y, h_3(x, y)\big) \equiv 0$ Formeln für die Gradienten $\nabla_{(y,z)} h_1(y, z)$, $\nabla_{(x,z)} h_2(x, z)$ und $\nabla_{(x,y)} h_3(x, y)$. Welche Resultate erhalten wir insbesondere für $\nabla_{(y,z)} h_1(0, 0)$, $\nabla_{(x,z)} h_2(0, 0)$ und $\nabla_{(x,y)} h_3(0, 0)$?

c) Man leite schließlich aus den Formeln für $\nabla_{(y,z)} h_1(y, z)$, $\nabla_{(x,z)} h_2(x, z)$ und $\nabla_{(x,y)} h_3(x, y)$ die Relation $\dfrac{\partial h_3(x, y)}{\partial x} \dfrac{\partial h_2(x, z)}{\partial z} \dfrac{\partial h_1(y, z)}{\partial y} = -1$ für $(x, y, z) \in f^{-1}(0) \cap B_r^3(0)$ her. Inwiefern geht in diese Formel überhaupt unser konkret vorgegebenes f ein?

b. w.

Aufgabe 15. (12 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $X : U \to \mathbb{R}^3, U \subset \mathbb{R}^2$ offen, eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

1. $X : U \to \mathbb{R}^3$ ist differenzierbar.
2. Für jedes $w \in U$ hat die Jakobi-Matrix $DX(w)$ maximalen Rang.
3. X bildet U bijektiv auf eine Teilmenge $X(U) \subset S$ ab.

Zeigen Sie: X ist eine Parametrisierung von $X(U)$.

Aufgabe 16. (12 Punkte)

a) Sei $a > 0$ und $X : (0, \infty) \times \mathbb{R} \to X\big((0, \infty) \times \mathbb{R}\big), X(r, \varphi) = \big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi), a\varphi\big)$. Zeigen Sie, dass die *Wendelfläche* $X\big((0, \infty) \times \mathbb{R}\big)$ eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Zeigen Sie, dass man die Sphäre $\mathcal{S}^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ nicht mit einer Karte parametrisieren kann.

c) Sei S eine reguläre, zusammenängende Fläche und $f : S \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ohne Nullstelle. Zeigen Sie, dass f auf S sein Vorzeichen nicht ändert.

Abgabe: Mo, 21.11.2016 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!