Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zur Differentialgeometrie 1

Blatt 5

Aufgabe 17. (12 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass für jede reelle symmetrische Matrix $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ durch $\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_ix_j = 1$ eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben ist. Skizzieren Sie die Flächen, die sich für $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$ ergeben.

b) Wir betrachten auf dem Gebiet $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > e, y > e\}$ die Funktion $f(x,y) := x^y - y^x$. Ist die Niveau-Menge $f^{-1}(0) \subset \Omega$ eine eindimensionale „reguläre Hyperfläche“ im $\mathbb{R}^2$? Welche Gestalt hat $f^{-1}(0)$ und inwiefern spielt der „Eckpunkt“ $(e,e) \notin \Omega$ hier eine heikle Rolle?

Aufgabe 18. (12 Punkte)

a) Konstruieren Sie einen Diffeomorphismus zwischen dem Ellipsoid $\mathcal{E} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ und der Einheitssphäre $\mathcal{S}^2$, d. h. $\mathcal{E}$ und $\mathcal{S}^2$ sind diffeomorph.

b) Zeigen Sie, dass eine Ebene diffeomorph zum Paraboloid $\mathcal{P} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z = x^2 + y^2\}$ ist.

Aufgabe 19. (12 Punkte)

X, Y, Z seien reguläre Flächen im $\mathbb{R}^3$ und $f : X \to Y, g : Y \to Z$ differenzierbare Abbildungen.
Zeigen Sie: die Komposition $g \circ f : X \to Z$ ist differenzierbar und für $x \in X$ gilt:

$$d(g \circ f)_x = dg_{fx} \circ df_x$$

b. w.

Aufgabe 20. (12 Punkte)

Bestimmen Sie die Tangentialebene der folgenden Flächen in den angegebenen Punkten:

a) $X(u,v) = (u, v, u^2 - v^2)$; $(1,1,0)$

b) $X(r,\varphi) = (r\cosh\varphi, r\sinh\varphi, r^2)$; $(1,0,1)$

c) $X(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, a\varphi)$; $(x,y,z) \in X\big((0,\infty)\times\mathbb{R}\big)$ beliebig $(a>0)$

Abgabe: Mo, 28.11.2016 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!