Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zur Differentialgeometrie 1

Blatt 6

Aufgabe 21. (12 Punkte)

a) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine zusammenhängende reguläre Fläche und $f : S \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $df_p = 0$ für alle $p \in S$.
Zeigen Sie: f ist konstant.

b) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $f : S \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, $f(p)$ sei ein lokales Extremum von f.
Zeigen Sie: p ist ein kritischer Punkt von f.

Aufgabe 22. (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass, wenn alle Normalen einer zusammenhängenden regulären Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ durch einen festen Punkt $a \in \mathbb{R}^3$ laufen, S in einer Sphäre mit Mittelpunkt a enthalten ist.

Aufgabe 23. (12 Punkte)

Sei $\alpha = (r, h) : I \to \mathbb{R}^2, I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, eine reguläre parametrisierte Kurve mit $r(t) > 0$ und $h'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$. Betrachten Sie die *Drehfläche*

$$X : I \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3,\ X(t, \varphi) := \begin{pmatrix} r(t)\cos(\varphi) \\ r(t)\sin(\varphi) \\ h(t) \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Koeffizienten der ersten Fundamentalform X.

b) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt der Drehfläche $2\pi \int\limits_{\alpha} r\, dS$ ist.

c) Zeigen Sie, dass sich X lokal stets so umparametrisieren lässt, dass die neue Parametrisierung winkeltreu ist, d. h. $E = G$ und $F = 0$.

b. w.

Aufgabe 24. (12 Punkte)

Bestimmen Sie den Teil der Einheitssphäre, der durch das Bild der Gauß-Abbildung folgender Flächen überdeckt wird:

a) $z = x^2 + y^2$ (Rotationsparaboloid)

b) $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (Rotationshyperboloid)

c) $x^2 + y^2 = \cosh^2(z)$ (Katenoid)

Abgabe: Mo, 05.12.2016 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!