Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zur Differentialgeometrie 1

Blatt 7

Aufgabe 25. (12 Punkte)

a) Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche und $\alpha : I \to S$ ($I \subset \mathbb{R}$ Intervall) eine reguläre parametrisierte Kurve, längs welcher S tangential zu einer Ebene E sei. Zeigen Sie, dass alle Punkte auf der Kurve entweder parabolische Punkte oder Flachpunkte sind.

b) Zeigen Sie, dass es auf jeder kompakten regulären Fläche mindestens einen elliptischen Punkt gibt.

Aufgabe 26. (12 Punkte)

a) Zeigen Sie: Ist p ein Punkt einer regulären Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$, so gilt für die mittlere Krümmung in p

$$H(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} k_n(\varphi)\, d\varphi,$$

wobei $k_n(\varphi)$ die Normalkrümmung der Fläche in p längs einer Richtung ist, die mit einer festen Richtung im Tangentialraum den Winkel φ bildet.

b) Zeigen Sie: Ist $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Minimalfläche, d. h. $H = 0$, so gilt für die Gaußabbildung

$$< dN_p(v), dN_p(w) >= -K(p) < v, w > \quad \forall p \in S\ \forall v, w \in T_pS.$$

Aufgabe 27. (12 Punkte)

Berechnen Sie die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform sowie die Hauptkrümmungen eines Helikoids

$$X(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au),\ \ (u, v) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), a > 0.$$

b. w.

Aufgabe 28. (12 Punkte)

a) Berechnen Sie die Normale und die Koeffizienten der ersten und zweiten Fundamentalform eines Graphen

$$X(x,y) = (x, y, z(x,y)), \quad (x,y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

und zeigen Sie, dass die Gaußkrümmung und die mittlere Krümmung durch

$$K = \frac{\det(D^2 z)}{(1+|Dz|^2)^2} \quad \text{und} \quad 2H = \operatorname{div}\left(\frac{Dz}{\sqrt{1+|Dz|^2}}\right)$$

gegeben sind.

b) Zeigen Sie, dass die Scherk'sche Fläche $z : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $z(x,y) := \log\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$ eine Minimalfläche ist und geben Sie einen möglichst großen Parameterbereich $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ an.

Abgabe: Mo, 12.12.2016 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!