Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zur Differentialgeometrie 1

Blatt 8

Aufgabe 29. (12 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche und $c : I \to S$ eine Asymptotenlinie mit nirgends verschwindender Krümmung und τ ihre Torsion.
Zeigen Sie: Bezeichnet K die Gaußkrümmung der Fläche, so gilt

$$\tau^2(s) = -K\big(c(s)\big) \quad \forall s \in I.$$

Aufgabe 30. (12 Punkte)

Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $p \in S$ ein elliptischer Punkt. Zeigen Sie, dass es dann eine Umgebung U von p in S gibt, sodass alle Punkte in U auf derselben Seite der Tangentialebene T_pS liegen.
Zeigen Sie ferner, dass, wenn $p \in S$ ein hyperbolischer Punkt ist, es in jeder Umgebung von p in S Punkte auf beiden Seiten der Tangentialebene T_pS gibt.
Was gilt in einem parabolischen Punkt?

Aufgabe 31. (12 Punkte)

Sei $\alpha = (r, h) : I \to \mathbb{R}^2$ eine nach Bogenlänge parametirisierte Kurve und

$$X(s, \varphi) := \begin{pmatrix} r(s)\cos(\varphi) \\ r(s)\sin(\varphi) \\ h(s) \end{pmatrix}$$

die durch Drehung von α um die z-Achse entstehende Drehfläche.

a) Zeigen Sie, dass die Gaußkrümmung von X in allen regulären Punkten gegeben ist durch
$$K(s, \varphi) = -\frac{r''(s)}{r(s)}\,.$$

b) Bestimmen Sie die beiden Hauptkrümmungen von X sowie die mittlere Krümmung.

b. w.

Aufgabe 32. (12 Punkte)

a) Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^0(\Omega)$. Es gelte

$$\int\limits_\Omega f(x)\xi(x)\,dx = 0 \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$.

b) Zeigen Sie, dass die Enneperfläche

$$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2\right), \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

eine Minimalfläche ist.

(Da X nicht injektiv ist, ist die Enneperfläche keine reguläre Fläche in unserem Sinne. Da aber $EG - F^2 \neq 0$ in allen Punkten, existiert lokal stets eine Inverse X^{-1} und wir können die Enneperfläche lokal stets als reguläre Fläche auffassen.)

Abgabe: Mo, 19.12.2016 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!