Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zur Differentialgeometrie 1

Blatt 9

Aufgabe 33. (12 Punkte)

Für eine reguläre Fläche $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ist die *Parallelfläche* im Abstand ε erklärt durch

$$X^\varepsilon(u,v) := X(u,v) + \varepsilon N(u,v).$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt $X_u^\varepsilon \times X_v^\varepsilon = (1 - 2H\varepsilon + K\varepsilon^2)(X_u \times X_v)$.

b) In den regulären Punkten von X^ε ist die Gaußkrümmung gegeben durch

$$\frac{K}{1 - 2H\varepsilon + K\varepsilon^2}$$

und die mittlere Krümmung durch

$$\frac{H - K\varepsilon}{1 - 2H\varepsilon + K\varepsilon^2}\,.$$

c) Falls X konstante mittlere Krümmung $H \neq 0$ besitzt, so hat X^ε für $\varepsilon = \dfrac{1}{2H}$ konstante Gaußkrümmung.

Aufgabe 34. (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass die *Catalan-Fläche*

$$X(u,v) = \Big(u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, -4 \sin\frac{u}{2} \sinh\frac{v}{2}\Big)$$

eine konform parametrisierte Minimalfläche ist.
$\big($$X$ ist nicht injektiv, vgl. die Bemerkungen zu Aufgabe 32 b).$\big)$

Aufgabe 35. (12 Punkte)

Sei $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und $X_1 : U \to S_1$ sowie $X_2 : U \to S_2$ Parametrisierungen zweier regulärer Flächen S_1 und S_2. Es gelte $E_1 = \lambda^2 E_2, F_1 = \lambda^2 F_2, G_1 = \lambda^2 G_2$, wobei λ eine nirgends verschwindende differenzierbare Funktion auf U ist. Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi := X_2 \circ X_1^{-1} : X_1(U) \to S_2$ eine lokal konforme Abbildung ist.

b. w.

Aufgabe 36. (12 Punkte)
Sei $U := \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2; 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\}$ und

$$X(\theta, \varphi) = \sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta), \qquad (\theta, \varphi) \in U$$

eine Parametrisierung der S^2. Zeigen Sie, dass mit $u = \log\tan\frac{\theta}{2}, v = \varphi$ eine konforme Parametrisierung von $X(U) = V$ durch

$$Y(u, v) = \left(\frac{1}{\cosh u}\cos v, \frac{1}{\cosh u}\sin v, \tanh u\right)$$

gegeben ist.
Folgern Sie, dass die *Mercator-Projektion* $Y^{-1} : V \to \mathbb{R}^2$ eine konforme Abbildung ist, die die Meridiane und Breitenkreise von S^2 auf Geraden in der Ebene abbildet.

Abgabe: Mo, 09. Januar 2017 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!

Wir wünschen allen ein frohes Weihnachtsfest und einen guten Rutsch ins neue Jahr!