Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes
Dr. T. Jenschke

SoSe 2017

Übungen zur Geometrischen Analysis und Minimalflächen 1

Blatt 1

Aufgabe 1. (12 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $X(u,v) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ eine Parametrisierung einer Fläche im $\mathbb{R}^3$. (Häufig identifizieren wir zur Vereinfachung die Fläche mit der gewählten Parametrisierung, wir sprechen also einfach von der Fläche X.) Dann ist der Flächeninhalt von X definiert durch $A_\Omega(X) := \int\limits_\Omega \sqrt{g}\, dudv$, wobei $g := \det \begin{pmatrix} X_u^2 & X_u \cdot X_v \\ X_u \cdot X_v & X_v^2 \end{pmatrix}$ die Gramsche Determinante bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass die obige Definition des Flächeninhalts mit der aus der Vorlesung $\left(A_\Omega(X) := \int\limits_\Omega |X_u \times X_v|\, dudv\right)$ übereinstimmt.

b) Zeigen Sie, dass $A_\Omega(X) = D_\Omega(X) = \frac{1}{2} \int\limits_\Omega X_u^2 + X_v^2 du\, dv$ *genau dann* gilt, wenn X konform parametrisiert ist, also $|X_u| = |X_v|$ und $X_u \cdot X_v = 0$ erfüllt ist.

Aufgabe 2. (12 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^0(\Omega)$. Es gelte

$$\int\limits_\Omega f(x)\xi(x)\, dx = 0 \quad \forall \xi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$.

b. w.

Aufgabe 3. (12 Punkte)
Bestimmen Sie eine C^∞-Parametrisierung einer Kreisscheibe mit Haar, d.h. der Fläche

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1, z = 0\} \cup \{(0,0,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1\}.$$

Berechnen Sie ferner den Flächeninhalt von S.

Aufgabe 4. (12 Punkte)
Sei das Katenoid gegeben durch

$$X(u,v) = (\alpha \cosh u \cos v, -\alpha \cosh u \sin v, \alpha u),\ \ u \in (-\infty, \infty),\ \ v \in [0, 2\pi)$$

und das Helikoid durch

$$X^*(u,v) = (\alpha \sinh u \sin v, \alpha \sinh u \cos v, \alpha v),\ \ u \in (-\infty, \infty),\ \ v \in (-\infty, \infty).$$

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f = X + iX^*$ die Cauchy-Riemann-Gleichungen $X_u = X_v^*, \quad X_v = -X_u^*$ erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass das Katenoid und das Helikoid Minimalflächen sind, d. h. es gilt $\Delta X = 0, \quad |X_u| = |X_v|, X_u \cdot X_v = 0.$

Abgabe: Mo, 08.05.2017 in der Übung.

Die erste Übung findet am Montag, den 08.05.2017 statt.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!