Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes
Dr. T. Jenschke

SoSe 2017

Übungen zur Geometrischen Analysis und Minimalflächen 1

Blatt 2

Aufgabe 5. (12 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Definition des Flächeninhalts $A_\Omega(X) = \int_\Omega |X_u \times X_v| \, dudv$ unabhängig von der gewählten Parametrisierung X ist.
(Tipp: Sei $\tau : \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein C^1-Diffeomorphismus und $\tilde{X} = X(\tau)$ eine andere Parametrisierung, dann ist zu zeigen: $A_\Omega(X) = A_{\tilde{\Omega}}(\tilde{X})$.)

b) Die Normale an einer Fläche X im Punkt $X(u,v)$ ist definiert durch $N(u,v) = \dfrac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$. Zeigen Sie, dass die Normale (bis auf das Vorzeichen) unabhängig von der gewählten Parametrisierung X ist.
(Tipp: Für $\tilde{X} = X(\tau)$ ist zu zeigen: $\frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u,v) = \pm \frac{\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v}{|\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v|}\big(\tau^{-1}(u,v)\big)$.)

Aufgabe 6. (12 Punkte)

Eine Parametrisierung $X \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ einer Fläche heißt regulär, falls $X_u \times X_v(u,v) \neq 0$ für alle $(u,v) \in \Omega$. Eine Fläche heißt regulär, wenn eine reguläre Parametrisierung der Fläche existiert.

a) Zeigen Sie, dass der Kegel

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\, x^2 + y^2 = z^2\}$$

außerhalb des Punktes $(0,0,0)$ eine reguläre Fläche ist und geben Sie Parametrisierungen an, mit denen er sich vollständig überdecken lässt.

b) Zeigen Sie, dass der Kegel K in $(0,0,0)$ keine reguläre Fläche ist.
(Tipp: Aufgabe 2 b).)

c) Geben Sie eine nicht reguläre Parametrisierung der $x-y-$Ebene an.

b. w.

Aufgabe 7. (12 Punkte)

Eine Möbiustransformation $M : \mathbb{C}\cup\{\infty\} \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ ist gegeben durch $M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad - bc \neq 0$.

a) Zeigen Sie, dass $M(z)$ eine konforme Abbildung ist, d. h. für $z = x + iy$ gilt $(\operatorname{Re} M)_x^2 + (\operatorname{Im} M)_x^2 = (\operatorname{Re} M)_y^2 + (\operatorname{Im} M)_y^2$ und $(\operatorname{Re} M)_x(\operatorname{Re} M)_y + (\operatorname{Im} M)_x(\operatorname{Im} M)_y = 0$

b) Zeigen Sie, dass sich $M(z)$ als Komposition von Translationen $T(z) = \xi + z,\ \xi \in \mathbb{C}$, Drehstreckungen $D(z) = \eta z,\ \eta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und Inversionen $I(z) = \frac{1}{z}$ darstellen lässt.

c) Zeigen Sie, dass $M(z)$ kreistreu ist, d. h. Geraden und Kreise werden auf Geraden und Kreise abgebildet.
(Tipp: Durch die Gleichung $\alpha(x^2+y^2)+\beta x+\gamma y+\delta = 0,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}, z = x+iy$ werden in $\mathbb{C}$ Geraden ($\alpha = 0$) bzw. Kreise ($\alpha \neq 0$) beschrieben.

Aufgabe 8. (12 Punkte)

Seien $0 \leq \theta_1 < \theta_2 < \theta_3 < 2\pi$ und $0 \leq \eta_1 < \eta_2 < \eta_3 < 2\pi$ beliebig. Zeigen Sie: Durch die Gleichung

$$\frac{w - \mathrm{e}^{i\eta_1}}{w - \mathrm{e}^{i\eta_2}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{i\eta_3} - \mathrm{e}^{i\eta_2}}{\mathrm{e}^{i\eta_3} - \mathrm{e}^{i\eta_1}} = \frac{z - \mathrm{e}^{i\theta_1}}{z - \mathrm{e}^{i\theta_2}} \cdot \frac{\mathrm{e}^{i\theta_3} - \mathrm{e}^{i\theta_2}}{\mathrm{e}^{i\theta_3} - \mathrm{e}^{i\theta_1}}$$

wird eine Möbiustransformation $f : \bar{B} \to \bar{B}, f(z) = w$ definiert, die $f(\mathrm{e}^{i\theta_j}) = \mathrm{e}^{i\eta_j}, j = 1, 2, 3$ erfüllt.
(Tipp: Um zu zeigen, dass f von $\bar{B}$ nach $\bar{B}$ abbildet, kann Aufgabe 7c) genutzt werden.)

Abgabe: Mo, 22.05.2017 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!