Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes
Dr. T. Jenschke

SoSe 2017

Übungen zur Geometrischen Analysis und Minimalflächen 1

Blatt 3

Aufgabe 9. (12 Punkte)

Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ eine geschlossene Jordankurve, $h : \partial B \to \Gamma$ ein Homöomorphismus und $X : \partial B \to \Gamma$ eine beliebige Parametrisierung von Γ.

Zeigen Sie: X ist *genau dann* schwach monoton (wachsend oder fallend), wenn eine schwach monoton wachsende Funktion $\tau : [0, 2\pi] \to [0, 2\pi]$ und ein $\Theta_0 \in [0, 2\pi)$ existiert, sodass $\tau(0) = 0, \tau(2\pi) = 2\pi$ und $X(\mathrm{e}^{i(\pm\Theta+\Theta_0)}) = h(\mathrm{e}^{i\tau(\Theta)})$.

(Schwach monoton bedeutet hier: Die Urbilder zusammenhängender Mengen sind zusammenhängend.)

Aufgabe 10. (12 Punkte)

Sei $X \in C^1(B, \mathbb{R}^3) \cap C^0(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$ und $0 < \delta < 1,\ x_0 \in \partial B$ beliebig. Dann existiert eine Menge $E \subset (\delta, \sqrt{\delta})$ mit $\mathcal{L}^1(E) > 0$, sodass für alle $x_1, x_2 \in \overline{B} \cap \partial B_r(x_0)$ mit $r \in E$ gilt:

$$|X(x_1) - X(x_2)| \leq \left(\frac{4\pi D(X)}{\log \frac{1}{\delta}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Aufgabe 11. (12 Punkte)

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} : M \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig beschränkte und gleichgradig stetige Funktionenfolge.

Zeigen Sie: Es existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die gleichmäßig gegen ein $f \in C^0(M)$ konvergiert. Dabei heißt (f_n) *gleichmäßig beschränkt*, falls ein $C > 0$ existiert, sodass $|f_n(x)| \leq C$ für alle $x \in M$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner heißt (f_n) *gleichgradig stetig*, wenn es eine Funktion $\delta = \delta(\epsilon)$ gibt, sodass für jedes $\varepsilon > 0$ und alle $x, x' \in M$ mit $|x - x'| < \delta(\varepsilon)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|f_n(x) - f_n(x')| < \varepsilon$.

Aufgabe 12. (12 Punkte)

Sei Γ eine geschlossene Jordankurve im $\mathbb{R}^3$.

Zeigen Sie, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\eta > 0$ gibt, sodass für alle Punkte $x_1, x_2 \in \Gamma$ mit $0 < |x_1 - x_2| < \eta$ eine Kurve $\Gamma_1 \subset \Gamma$ mit Endpunkten x_1, x_2 und $\operatorname{diam} \Gamma_1 := \sup\limits_{x,y\in\Gamma_1} |x - y| < \varepsilon$ existiert.

Abgabe: Mi, 07.06.2017 in der Übung.