Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes
Dr. T. Jenschke

SoSe 2017

Übungen zur Geometrischen Analysis und Minimalflächen 1

Blatt 4

Aufgabe 13. (12 Punkte)

Die sog. *Fundamentallösungen* der Laplacegleichung sind gegeben durch

$$T_y(x) := T(|x-y|) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log|x-y|, & n=2 \\ \frac{1}{n(2-n)w_n}|x-y|^{2-n}, & n\geq 3, \end{cases}$$

wobei $w_n := |B_1(0)|, B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) $D_i T_y(x) = \frac{1}{nw_n}(x_i - y_i)|x-y|^{-n}$

b) $D_{ij}T_y(x) = \frac{1}{nw_n}[|x-y|^2\delta_{ij} - n(x_i-y_i)(x_j-y_j)]|x-y|^{-n-2}$

c) $\Delta T = 0$.

Aufgabe 14. (12 Punkte)

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial\Omega \in C^1, \nu$ sei die äußere Normale an $\partial\Omega$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u \cdot \nu$ bezeichne die Normalenableitung von u. Zeigen Sie:

a) Für $u, v \in C^2(\bar{\Omega})$ gilt

$$\int\limits_{\Omega} v\Delta u + (\nabla u \cdot \nabla v)dx = \int\limits_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu}dA$$

und

$$\int\limits_{\Omega}(v\Delta u - u\Delta v)dx = \int\limits_{\partial\Omega}\left(v\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)dA$$

b) Für $u \in C^2(\bar{\Omega})$ gilt

$$u(y) = \int\limits_{\partial\Omega}\left\{u(x)\frac{\partial T}{\partial v}(x,y) - T(x,y)\frac{\partial u}{\partial v}(x)\right\}dA + \int\limits_{\Omega} T(x,y)\Delta u(x)\,dx,$$

wobei T die Fundamentallösung der Laplacegleichung (siehe Aufg. 13) ist.
(Tipp: Wenden Sie den zweiten Teil von a) auf $v = T$ sowie das Gebiet $\Omega - B_\varepsilon(y)$ an und lassen Sie anschließend $\varepsilon \to 0$ gehen.)

b. w.

Aufgabe 15. (12 Punkte)
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, d.h. $\Delta u = 0$ in Ω. Zeigen Sie, dass für jede Kugel $B_R(x_0) \subset\subset \Omega$ die Mittelwertformeln

$$u(x_0) = \frac{1}{n w_n R^{n-1}} \int\limits_{\partial B_R(x_0)} u(x)dA \text{ und } u(x_0) = \frac{1}{w_n R^n} \int\limits_{B_R(x_0)} u(x)dx \quad (1)$$

gelten, hierbei sei $w_n = |B_1(0)|$. Zeigen Sie ferner, dass aus $\Delta u \geq 0 (\leq 0)$ die entsprechenden Ungleichungen in (1) folgen.
(Tipp: Aufgabe 14 b))

Aufgabe 16. (12 Punkte)

a) Sei $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u \geq 0 (\leq 0)$, es gebe ein $x_0 \in \Omega$ mit $u(x_0) = \sup\limits_{\Omega} u$ $(u(x_0) = \inf\limits_{\Omega} u)$. Zeigen Sie, dass u dann konstant ist, d.h. eine nicht-konstante harmonische Funktion kann im Inneren kein Maximum oder Minimum annehmen.

b) Seien $u, v \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ mit $\Delta u = \Delta u$ in Ω und $u = v$ auf $\partial\Omega$. Zeigen Sie, dass dann $u = v$ in Ω gilt.

c) Sei $u \in C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ und $\Delta u \geq 0 (\leq 0)$ in Ω, Zeigen Sie, dass dann $\sup\limits_{\Omega} u = \sup\limits_{\partial\Omega} u$ $(\inf\limits_{\Omega} u = \inf\limits_{\partial\Omega} u)$ gilt. Ist u harmonisch, so folgt

$$\inf_{\partial\Omega} u \leq u(x) \leq \sup_{\partial\Omega} u \ \forall x \in \Omega.$$

(Tipp: Aufgabe 15)

Abgabe: Mi, 21.06.2017 in der Übung.