Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes
Dr. T. Jenschke

SoSe 2017

# Übungen zur Geometrischen Analysis und Minimalflächen 1

## Blatt 5

**Aufgabe 17.** (18 Punkte)

Sei $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ und $w = \rho e^{i\theta}, \xi = e^{i\vartheta}$, die Abbildung

$$P(\xi, w) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - \rho^2}{1 - 2\rho\cos(\vartheta - \theta) + \rho^2}$$

heißt *Poissonkern.* Zeigen Sie:

a) Ist $h$ eine auf $\partial B$ stetige Funktion, so ist die Funktion

$$f(w) = \begin{cases} \int\limits_0^{2\pi} h(\xi)P(\xi, w)d\vartheta & w \in B \\ h(w) & w \in \partial B \end{cases}$$

auf $\overline{B}$ stetig und in $B$ harmonisch.

b) Ist $f$ eine auf $\overline{B}$ stetige und in $B$ harmonische Funktion, so besitzt $F$ für jedes $w \in B$ die Darstellung

$$f(w) = \int_0^{2\pi} f(\xi)P(\xi, w)d\vartheta.$$

**Aufgabe 18.** (12 Punkte)

a) Sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ harmonisch und $\Omega' \subset\subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass dann für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ die folgende Abschätzung gilt:

$$\sup_{\Omega'} |D^\alpha u| \leq \left(\frac{n|\alpha|}{\delta}\right)^{|\alpha|} \sup_{\Omega} |u|,$$

wobei $\delta := dist(\Omega', \partial\Omega)$ und $|\alpha| := \alpha_1 + ... + \alpha_n$ gesetzt wurde.

b) Zeigen Sie, dass jede beschränkte Folge harmonischer Funktionen $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Teilfolge enthält, die auf jedem $\Omega' \subset\subset \Omega$ mitsamt ihren Ableitungen gegen eine harmonische Funktion konvergiert.

b. w.

**Aufgabe 19.** (18 Punkte)
Sei $B = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$ und $f \in C^{0,\alpha}(B) \cap L_\infty(B)$. Das *Newtonpotential* von $f$ ist gegeben durch

$$w(x) = \int\limits_B T(x,y) f(y) dy,$$

wobei $T(x,y) = \frac{1}{2\pi} \log |x-y|$ die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung ist. Zeigen Sie:

a) Es gilt $w \in C^1(\mathbb{R}^2) \cap C^2(B)$ und für $x \in B$ gilt

$$D_i w(x) = \int\limits_B D_i T(x,y) f(y) dy,$$

$$D_{ij} w(x) = \int\limits_{\Omega_0} D_{ij} T(x,y)(f(y) - f(x)) dy - f(x) \int\limits_{\Omega_0} D_i T(x,y) \nu_j(y) dS,$$

hierbei ist $\Omega_0 \supset B$, sodass der Gauß'sche Satz anwendbar ist und $f$ wird außerhalb von $B$ gleich Null gesetzt. Folgern Sie daraus, dass $\Delta w = f$ für $x \in B$.

b) Das Problem

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{in } B \\ \quad u = 0 & \text{auf } \partial B \end{cases}$$

ist lösbar und die Lösung hat die Gestalt

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_B f(y) \left( \log \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2xy} - \log \sqrt{(|x||y|)^2 + 1 - 2xy} \right) dy.$$

**Abgabe: Mi, 05.07.2017 in der Übung.**