Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zu Minimalflächen 1

Blatt 1

Aufgabe 1

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $X(u,v) \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ eine Parametrisierung einer Fläche im $\mathbb{R}^3$. (Häufig identifizieren wir zur Vereinfachung die Fläche mit der gewählten Parametrisierung, wir sprechen also einfach von der Fläche X.) Dann ist der Flächeninhalt von X definiert durch $A_\Omega(X) := \int\limits_\Omega \sqrt{g}\, dudv$, wobei $g := \det \begin{pmatrix} X_u^2 & X_u \cdot X_v \\ X_u \cdot X_v & X_v^2 \end{pmatrix}$ die Gramsche Determinante bezeichnet.

a) Zeigen Sie, dass die obige Definition des Flächeninhalts mit der aus der Vorlesung $\left(A_\Omega(X) := \int\limits_\Omega |X_u \times X_v|\, dudv\right)$ übereinstimmt.

b) Berechnen Sie die Oberfläche einer Kugel mit Radius R.
Tipp: Eine Parametrisierung der Kugeloberfläche ist gegeben durch $X(\varphi, \vartheta) = (R \sin\vartheta \cos\varphi, R \sin\vartheta \sin\varphi, R\cos\vartheta),\ \varphi \in (0, 2\pi),\ \vartheta \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die Definition des Flächeninhalts unabhängig von der gewählten Parametrisierung X ist.
Tipp: Sei $\tau : \tilde{\Omega} \to \Omega$ ein C^1-Diffeomorphismus und $\tilde{X} = X(\tau)$ eine andere Parametrisierung, dann ist zu zeigen: $A_\Omega(X) = A_{\tilde{\Omega}}(\tilde{X})$.

b) Die Normale an eine Fläche X im Punkt $X(u,v)$ ist definiert durch $N(u,v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$. Zeigen Sie, dass die Normale (bis auf das Vorzeichen) unabhängig von der gewählten Parametrisierung X ist.
Tipp: Für $\tilde{X} = X(\tau)$ ist zu zeigen: $\frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u,v) = \pm \frac{\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v}{|\tilde{X}_u \times \tilde{X}_v|}\big(\tau^{-1}(u,v)\big)$.

b.w.

Aufgabe 3

Eine Parametrisierung $X \in C^2(\Omega, \mathbb{R}^3)$ einer Fläche heißt regulär, falls $X_u \times X_v(u,v) \neq 0$ für alle $(u,v) \in \Omega$. Eine Fläche heißt regulär, wenn eine reguläre Parametrisierung der Fläche existiert.

a) Zeigen Sie, dass der Kegel

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\, x^2 + y^2 = z^2\}$$

außerhalb des Punktes $(0,0,0)$ eine reguläre Fläche ist und geben Sie Parametrisierungen an, mit denen er sich vollständig überdecken lässt.

b) Zeigen Sie, dass der Kegel K in $(0,0,0)$ keine reguläre Fläche ist.
Tipp: Aufgabe 2 b).

c) Geben Sie eine nicht reguläre Parametrisierung der $x - y-$Ebene an.

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie, dass das Katenoid

$$X(u,v) = (\alpha \cosh u \cos v, -\alpha \cosh u \sin v, \alpha u),\;\; u \in (-\infty, \infty),\;\; v \in [0, 2\pi)$$

eine Minimalfläche ist, d. h. es gilt $\Delta X = 0,\;\; |X_u|^2 = |X_v|^2,\;\; X_u \cdot X_v = 0.$

b) Zeigen Sie, dass das Helikoid

$$X^*(u,v) = (\alpha \sinh u \sin v, \alpha \sinh u \cos v, \alpha v),\;\; u \in (-\infty, \infty),\;\; v \in (-\infty, \infty)$$

eine Minimalfläche ist.

c) Zeigen Sie, dass die Funktion $f = X + iX^*$ die Cauchy-Riemann-Gleichungen $X_u = X_v^*, X_v = -X_u^*$ erfüllt.

Abgabe am Montag, 07.11.2016 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern alle Blätter zusammen. Vielen Dank!