Übungen zu Minimalflächen 1
Blatt 2

Aufgabe 5

Sei $z = (x, y) : I \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare, ebene Kurve mit $y > 0$ auf $I = [a, b]$ und $X(u, v) = \big(x(u), y(u) \cos v\, y(u) \sin v\big), (u, v) \in I \times [0, 2\pi]$ ihre Drehfläche.

a) Zeigen Sie, dass $X(u, v)$ für $z' \neq 0$ eine reguläre Fläche im $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Beweisen Sie die Formel von Pappus

$$A(X) = 2\pi \int_a^b |z'| y\, dt$$

für den Flächeninhalt der Drehfläche $X(u, v)$.

Aufgabe 6

Die Enneper-Fläche ist gegeben durch

$$X(u, v) := (u + uv^2 - \frac{u^3}{3}, -v - vu^2 + \frac{v^3}{3}, u^2 - v^2),\ (u, v) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie:

a) X ist eine Minimalfläche.

b) Die Normale N von X ist gegeben durch

$$N(u, v) = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}(2u, 2v, u^2 + v^2 - 1).$$

c) Für die Gaußkrümmung $K_X := \frac{\mathcal{LN} - \mathcal{M}^2}{\mathcal{EG} - \mathcal{F}^2}$ und die mittlere Krümmung $H_X := \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathcal{LG} + \mathcal{EN} - 2\mathcal{FM}}{\mathcal{EG} - \mathcal{F}^2}$ gilt:

$$H_X = 0 \text{ und } K_X = \frac{-4}{(1 + u^2 + v^2)^4}.$$

Dabei sind $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ bzw. $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ die Koeffizienten der ersten bzw. zweiten Fundamentalform.

b.w.

Aufgabe 7

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein zusammenhängendes Gebiet, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ und $X(u,v) := (u, v, f(u,v))$ der Graph von f über Ω. Beweisen Sie die mittlere Krümmungsgleichung

$$H_X(u,v) = \operatorname{div}\left(\frac{\nabla f(u,v)}{2\sqrt{1+|\nabla f(u,v)|^2}}\right).$$

Aufgabe 8

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen. Eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt im Punkt z_0 komplex differenzierbar, falls

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = a$$

für ein $a =: f'(z_0) \in \mathbb{C}$. (Wenn f in allen Punkten $z \in \Omega$ komplex differenzierbar ist, so heißt f holomorph in Ω mit Ableitung $f' : \Omega \to \mathbb{C}$).
Zeigen Sie: f ist genau dann in $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar, wenn f in (x_0, y_0) total differenzierbar ist im Sinne der reellen Analysis ($\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$) und die Cauchy-Riemann-Gleichungen

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0)$$

für $f = u + iv$ erfüllt sind.

Abgabe am Montag, 21.11.2016 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern alle Blätter zusammen. Vielen Dank!