Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zu Minimalflächen 1
Blatt 4

Aufgabe 13

Für eine reguläre Fläche $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ ist die *Parallelfläche* im Abstand ϵ erklärt durch

$$X^\epsilon(u,v) := X(u,v) + \epsilon N(u,v)$$

Zeigen Sie:

a) Es gilt $\quad X_u^\epsilon \times X_v^\epsilon = (1 - 2H\epsilon + K\epsilon^2)(X_u \times X_v)$.

b) In den regulären Punkten von X^ϵ ist die Gaußkrümmung gegeben durch

$$\frac{K}{1 - 2H\epsilon + K\epsilon^2}$$

und die mittlere Krümmung durch

$$\frac{H - K\epsilon}{1 - 2H\epsilon + K\epsilon^2}.$$

c) Falls X konstante mittlere Krümmung $H \neq 0$ besitzt, so hat X^ϵ für $\epsilon = \frac{1}{2H}$ konstante Gaußkrümmung.

Aufgabe 14

Zeigen Sie, dass die *Catalan-Fläche*

$$X(u,v) = \left(u - \sin u \cosh v, 1 - \cos u \cosh v, 4 \sin\frac{u}{2} \sinh\frac{v}{2}\right)$$

eine Minimalfläche ist.

Aufgabe 15

Sei $X(u,v)$ die Catalan-Fläche aus Aufgabe 14.

a) Zeigen Sie, dass für alle $u \in \mathbb{R}$ $X(u,\cdot)$ in einer Ebene senkrecht zur x-y-Ebene liegt und dass $z^2 = a\rho$ mit $a := 8\sin^2\frac{u}{2}$ und $\rho := \cosh v - 1$ eine Parabel ist, die durch $X(u,\cdot)$ parametrisiert wird.

b) Zeigen Sie, dass für alle Punkte (x,y,z) der Catalan-Fläche gilt: $8(y-2) \leq z^2$.

Aufgabe 16

Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ eine holomorphe Abbildung. Beweisen Sie das Lemma von Schwarz-Pick:
Falls $f(0) = 0$, gilt $|f(z)| \leq |z|$ für alle $z \in B_1(0)$ und $|f'(0)| \leq 1$. Geben Sie die Form von f explizit an für den Fall, dass für einen Punkt $z_0 \in B_1(0)\backslash\{0\}$ die Gleichheit $|f(z_0)| = |z_0|$ gilt.