Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zu Minimalflächen 1

Blatt 5

Aufgabe 17

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränkt und $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ eine konform parametrisierte, reguläre C^2-Fläche. Zeigen Sie, dass bei Störung in Normalen-Richtung ϕN mit $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ für die zweite Variation des Flächeninhalts gilt:

$$\delta^2 \mathcal{A}(X, \phi N) := \frac{d^2}{d\epsilon^2} \mathcal{A}(X + \epsilon \phi N)|_{\epsilon=0} = \int_\Omega 2\phi^2 K \mathcal{E} + |\nabla \phi|^2 du\, dv$$

Aufgabe 18

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein zusammenhängendes Gebiet und $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$. Beweisen Sie folgende Formeln für die mittlere Krümmung H des Graphen von f über Ω:

$$\left(\frac{f_x f_y}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}} \right)_y (x, y) - \left(\frac{1 + f_y^2}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}} \right)_x (x, y) = 2 f_x H(x, y, f(x, y)),$$

$$\left(\frac{f_x f_y}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}} \right)_x (x, y) - \left(\frac{1 + f_x^2}{(1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}}} \right)_y (x, y) = 2 f_y H(x, y, f(x, y)).$$

Aufgabe 19

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit glattem Rand $\partial\Omega$, $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R})$ und $\mathcal{A}(f) := \int_\Omega (1 + |\nabla f|^2)^{\frac{1}{2}} du\, dv$ das nicht-parametrische Areafunktional. Weiter seien Randwerte $r \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ gegeben.

a) Beweisen Sie, dass das Funktional $\mathcal{A}$ in der Randwertklasse $[r] := \left\{ f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}); f|_{\partial\Omega} = r|_{\partial\Omega} \right\}$ strikt konvex ist, dass also $\mathcal{A}(tf_1 + (1-t)f_2) < t\mathcal{A}(f_1) + (1-t)\mathcal{A}(f_2)$ für beliebige $f_1, f_2 \in [r]$ mit $f_1 \neq f_2$ und $t \in (0, 1)$ erfüllt ist.

b) Beweisen Sie, dass höchstens ein $f^* \in [r]$ mit $\mathcal{A}(f^*) = \inf_{f \in [r]} \mathcal{A}(f)$ existiert.

   Zeigen Sie weiterhin, dass ein $f^* \in [r]$, welches die Minimalflächengleichung

   $$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla f^*}{(1+|\nabla f^*|^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = 0$$

   in Ω erfüllt, bereits dieser eindeutige Minimierer von $\mathcal{A}$ in $[r]$ sein muss.

Aufgabe 20

a) Zeigen Sie mit Hilfe von Aufgabe 16, dass alle Elemente der Automorphismengruppe $Aut(B)$ der Einheitskreisscheibe $B = B_1(0)$, d. h. alle biholomorphen Abbildungen von B auf B, von der Form

$$f(z) = c \cdot \frac{z-a}{\overline{a}z-1}, \ a, c \in \mathbb{C}, \ |c| = 1$$

sind.

b) Konstruieren Sie eine biholomorphe Abbildung g von der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{w \in \mathbb{C} | \mathrm{Im}(w) > 0\}$ auf B. Geben Sie auch die Umkehrabbildung g^{-1} an! Zeigen Sie, dass sich g auf $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$ stetig fortsetzen lässt. Worauf wird $\mathbb{R}$ von der Fortsetzung abgebildet?

c) Worauf bildet g diejenigen Geraden ab, welche parallel zu den Achsen (in $\mathbb{H}$) verlaufen?