Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes

WS 2016/2017

Übungen zu Minimalflächen 1

Blatt 6

Aufgabe 21

a) Sei $E := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$ mit $a, b, c > 0$ ein Ellipsoid. Geben Sie den Tangentialraum $T_{(x,y,z)}E$ und den Normalraum $N_{(x,y,z)}E$ in einem beliebigen Punkt $(x,y,z) \in E$ an.

b) Sei $H := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - c^2 = z^2\}$ mit $c > 0$ ein einschaliges Hyperboloid. Geben Sie den Tangentialraum $T_{(x,y,z)}H$ und den Normalraum $N_{(x,y,z)}H$ in einem beliebigen Punkt $(x,y,z) \in H$ an.

Aufgabe 22

Sei E das Ellipsoid aus Aufgabe 21. Berechnen Sie die Weingartenabbildung $L_{(0,y,z)} : T_{(0,y,z)}E \to T_{(0,y,z)}E$ und daraus die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen von E in einem beliebigen Punkt $(0,y,z) \in E$.

Aufgabe 23

Sei H das einschalige Hyperboloid aus Aufgabe 21. Berechnen Sie die Weingartenabbildung $L_{(x,y,z)} : T_{(x,y,z)}H \to T_{(x,y,z)}H$ und daraus die Hauptkrümmungen und Hauptkrümmungsrichtungen von H in einem beliebigen Punkt $(x,y,z) \in H$.

Aufgabe 24

Die sog. *Fundamentallösungen* der Laplacegleichung sind gegeben durch

$$T_y(x) := T(|x-y|) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log|x-y|, & n = 2 \\ \frac{1}{n(2-n)w_n}|x-y|^{2-n}, & n \geq 3, \end{cases}$$

wobei $w_n := |B_1(0)|, B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) $D_i T_y(x) = \frac{1}{nw_n}(x_i - y_i)|x-y|^{-n}$

b) $D_{ij} T_y(x) = \frac{1}{nw_n}[|x-y|^2 \delta_{ij} - n(x_i - y_i)(x_j - y_j)]|x-y|^{-n-2}$

c) $\Delta T = 0$.