Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes
Dr. P. Henkemeyer

SoSe 2017

Übungen zur Riemannschen Geometrie 1

Blatt 1

Aufgabe 1. (12 Punkte)

Seien M und N differenzierbare Mannigfaltigkeiten und seien $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}, \{(V_\beta, y_\beta)\}$ differenzierbare Strukturen auf M bzw. N.
Betrachten Sie das kartesische Produkt $M \times N$ und die Abbildungen $z_{\alpha\beta}(p,q) = \big(x_\alpha(p), y_\beta(q)\big), p \in U_\alpha,\ q \in V_\beta$.

a) Zeigen Sie, dass $\{(U_\alpha \times V_\beta,\ z_{\alpha\beta})\}$ eine differenzierbare Struktur auf $M \times N$ darstellt. Zeigen Sie weiterhin, dass die Projektionen $\pi_1 : M \times N \to M$ und $\pi_2 : M \times N \to N$ differenzierbar sind.

   (Mit dieser differenzierbaren Struktur heißt $M \times N$ Produktmannigfaltigkeit von M mit N.)

b) Betrachten Sie für $\mathcal{S}^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon x^2 + y^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^2$ die Produktmannigfaltigkeit $\mathcal{S}^1 \times \mathcal{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$. Zeigen Sie, dass diese homöomorph zu dem Torus

$$\mathcal{T} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - 2\right)^2 + x_3^2 - 1 = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

   ist.

Aufgabe 2. (12 Punkte)

Betrachten Sie die beiden folgenden differenzierbaren Strukturen auf der reellen Linie $\mathbb{R} : (\mathbb{R}, x_1)$, wobei $x_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_1(x) = x$ und $(\mathbb{R}, x_2)$, wobei $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x_2(x) = x^3$.
Zeigen Sie:

a) Die Identitätsabbildung $i : (\mathbb{R}, x_1) \to (\mathbb{R}, x_2)$ ist kein Diffeomorphismus.

   (Daher sind die maximalen Strukturen, welche durch $(\mathbb{R}, x_1)$ und $(\mathbb{R}, x_2)$ bestimmt sind, verschieden voneinander.)

b) Die Abbildung $f : (\mathbb{R}, x_1) \to (\mathbb{R}, x_2)$ gegeben durch $f(x) = x^3$ ist ein Diffeomorphismus.

   (Somit bestimmen die verschiedenen differenzierbaren Strukturen $(\mathbb{R}, x_1)$ und $(\mathbb{R}, x_2)$ diffeomorphe differenzierbare Mannigfaltigkeiten.)

b. w.

Aufgabe 3. (12 Punkte)

Es bezeichne $\mathbb{RP}^2$ die 2-dimensionale projektive reelle Ebene. Zeigen Sie, dass die Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, F(x, y, z) := (x^2 - y^2, xy, xz, yz)$ eine differenzierbare injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}^4$ induziert.

Aufgabe 4. (12 Punkte)

Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die spezielle lineare Gruppe

$$SL(n, \mathbb{R}) := \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A = 1\} \subset \mathbb{R}^{n\times n}$$

a) Beweisen Sie, dass $SL(n, \mathbb{R})$ eine Gruppe ist.

b) Zeigen Sie, dass $SL(n, \mathbb{R})$ eine Mannigfaltigkeit ist.

c) Welche Dimension hat $SL(n, \mathbb{R})$?

Abgabe: Montag, 08.05.2017 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!