Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. U. Dierkes
Dr. T. Jenschke

WiSe 2017/18

Übungen zur Variationsrechnung I

Blatt 1

Aufgabe 1. (8 Punkte)

a) Sei $p \geq 1$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine messbare Funktion, dann definieren wir

$$\|f\|_{L_p} := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Den Vektorraum aller messbaren Funktionen mit $\|f\|_{L_p} < \infty$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie für $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und zwei Funktionen $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathcal{L}_q(\mathbb{R}^n)$ die *Höldersche Ungleichung*:

$$\|fg\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_p} \|g\|_{L_q}$$

b) Die Menge $\mathcal{N} := \{f \text{ messbar } : \|f\|_{L_p} = 0\}$ ist ein Untervektorraum von $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ und wir setzen

$$L_p(\mathbb{R}^n) := \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)/\mathcal{N}.$$

(Für zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ gilt also $f \sim g$ genau dann, wenn $f - g \in \mathcal{N}$.) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|_{L_p}$ eine Norm auf $L_p(\mathbb{R}^n)$ definiert.

Aufgabe 2. (8 Punkte)

a) Sei $p \geq 1$ und $f_n \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ eine Funktionenfolge, die fast überall gegen die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvergiere. Es gebe eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\|F\|_{L_p} < \infty$, sodass $|f_n| \leq F$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ gilt und

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_{L_p} = 0.$$

Hinweis: Wenden Sie den Satz über majorisierte Konvergenz auf die Funktionenfolge $f_n \chi_K$ an. Dabei ist χ_K die charakteristische Funktion einer kompakten Menge K.

b) Sei $p \geq 1$ und $g_n \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ eine Funktionenfolge mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_{L_p} =: M < \infty.$$

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ fast überall gegen eine Funktion $g \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ konvergiert und

$$\lim_{k \to \infty} \|g - \sum_{n=1}^{k} g_n\|_{L_p} = 0.$$

Hinweis: Wenden Sie Aufgabenteil a) auf die Partialsummen der Reihe an.

Aufgabe 3. (8 Punkte)

a) Eine Folge $f_n \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ heißt L_p-Cauchyfolge, falls zu jedem $\epsilon > 0$ ein k_0 existiert, sodass
$$\|f_n - f_m\|_{L_p} < \epsilon \quad \forall\ m, n \geq k_0.$$
Eine Folge $f_n \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ konvergiert im Sinne der L_p-Norm gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$, falls
$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L_p} = 0.$$
Zeigen Sie, dass jede L_p-Cauchyfolge im Sinne der L_p-Norm konvergiert. (D. h. der Raum $L_p(\mathbb{R}^n)$ ist bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{L_p}$ vollständig, also ein Banachraum.)

Hinweis: Wenden Sie Aufgabe 2b) auf die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$ mit einer geeigneten Teilfolge f_{n_k} an.

b) Eine Folge $f_n \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ konvergiere im Sinne der L_p-Norm gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie, dass dann eine Teilfolge f_{n_k} existiert, die punktweise fast überall gegen f konvergiert.

Aufgabe 4. (8 Punkte)

Mit $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ bezeichnen wir den Raum der stetigen Funktion mit kompaktem Träger $\mathrm{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}}$. Analog bezeichnet $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger.

a) Zeigen Sie: Für jedes $p \geq 1$ liegt $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ bzgl. der L_p-Norm dicht in $\mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$, d. h. zu jedem $f \in \mathcal{L}_p(\mathbb{R}^n)$ und jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $\varphi \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ mit
$$\|f - \varphi\|_{L_p} < \epsilon.$$
Hinweis: Hier darf verwendet werden, dass $C_c^0(\mathbb{R}^n)$ bzgl. der L_1-Norm dicht in der Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen, also in $\mathcal{L}_1(\mathbb{R}^n)$ liegt.

b) Zeigen Sie: Für jedes $p \geq 1$ liegt $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ bzgl. der L_p-Norm dicht in $C_c^0(\mathbb{R}^n)$.

Hinweis: Hier darf verwendet werden, dass zu jedem $f \in C_c^0(\mathbb{R}^n)$ ein $R > 0$ existiert, sodass zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ existiert mit $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B_R(0)$ und
$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x) - \varphi(x)| < \epsilon.$$

Abgabe: Montag, 16.10.2017 in der Übung.

Bitte versehen Sie Ihre Übungsblätter mit Ihrem Namen und Ihrer Mat-Nr. und tackern Sie alle Blätter zusammen. Vielen Dank!