

# Übung Numerik und Optimierung großer nichtlinearer Systeme

## Blatt 1

### Aufgabe 1

- (a) Sei  $X = Y = C[a, b]$  mit Norm  $\|\cdot\|_\infty$  und sei  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Integraloperator, der wie folgt definiert ist,

$$(Tu)(x) = \int_a^b K(x, s)u(s)ds,$$

mit Kern  $K(x, s)$ , der auf  $[a, b] \times [a, b]$  stetig ist.

Zeigen Sie, dass  $T$  Fréchet-differenzierbar ist und bestimmen Sie die Fréchet-Ableitung.

- (b) Sei wieder  $X = Y = C[a, b]$  mit Norm  $\|\cdot\|_\infty$ . Nun sei  $T : X \rightarrow X$  ein nichtlinearer Integraloperator, der wie folgt definiert ist,

$$(Tu)(x) = u(x) \int_a^b K(x, s)u(s)ds,$$

mit Kern  $K(x, s)$ , der auf  $[a, b] \times [a, b]$  stetig ist.

Zeigen Sie auch hier, dass  $T$  Fréchet-differenzierbar ist und bestimmen Sie die Fréchet-Ableitung.

### Aufgabe 2

Man zeige: Der Sinus-Operator  $F : L^p(0, 1) \rightarrow L^q(0, 1)$ ,  $F(x(t)) := \sin(x(t))$  für alle  $x \in L^p(0, 1)$  ist Fréchet-differenzierbar für  $1 \leq q < p \leq \infty$ .

### Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass der Mittelwertsatz in  $\mathbb{R}^1$ , d.h.

$$f \in C^1(a, b), x, y \in (a, b), \Rightarrow \quad \exists t \in (0, 1) \text{ mit } f(y) - f(x) = f'(x + t(y - x))(y - x),$$

schon in  $\mathbb{R}^2$  nicht mehr korrekt ist. Benutzen Sie dazu als Gegenbeispiel die Funktion  $f(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^3)^\top$  an den Stellen  $y = (1, 1)^\top$  und  $x = (0, 0)^\top$ .

### Aufgabe 4

- (a) Seien  $\|\cdot\|_a$  und  $\|\cdot\|_b$  Normen auf  $\mathbb{R}^n$ . Zeigen Sie, dass Konstanten  $\underline{c}, \bar{c} > 0$  existieren, so dass für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt

$$\underline{c}\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq \bar{c}\|x\|_a, \tag{1}$$

d.h. alle Normen auf  $\mathbb{R}^n$  sind äquivalent.

- (b) Berechnen Sie für die Euklidische Norm und die Maximumnorm die optimalen Konstanten  $\underline{c}$  und  $\bar{c}$  aus (1).

- (c) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Äquivalenz der Normen in unendlich-dimensionalen Räumen im Allgemeinen nicht gilt.

Homepage der Veranstaltung ist:

[https://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv\\_assmann\\_ss15.php](https://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_assmann_ss15.php)

**Termine und Räume:**

		Zeit		Raum	
VL	Mo	10-12	WSC-S-U-4.02	Arnd Rösch	
	Do	10-12	WSC-S-U-3.02		
Ü	Di	10-12	WSC-S-U-4.01	Ute Aßmann	