SS 2015 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Übung Numerik und Optimierung großer nichtlinearer Systeme

Blatt 4

Aufgabe 1
Eine Funktion f sei in einer Umgebung von $\tilde{x} \in D$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass gilt:

(a) Die hinreichende Bedingung 2. Ordnung

$$d^\top f''(\tilde{x})d > 0 \qquad \forall d \in \mathbb{R}^n,\, d \neq 0 \tag{1}$$

ist äquivalent zu

$$d^\top f''(\tilde{x})d \geq \alpha \|d\|^2$$

wobei $\alpha > 0$ der kleinste Eigenwert der Hessematrix ist.

(b) Die Bedingung (1) impliziert, dass für $y \in B(\tilde{x}, r)$, $r > 0$ gilt

$$d^\top f''(y)d \geq \frac{\alpha}{2}\|d\|^2 \qquad \forall d \in \mathbb{R}^n.$$

Aufgabe 2
Sei $D \in \mathbb{R}^n$ offen, $\mathcal{F} \subset D$ sei nichtleer und konvex, und $f : D \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar auf D. Zeigen Sie, ist f'' gleichmäßig positiv definit auf $\mathcal{F}$, d.h. $\exists \beta > 0$, so dass $\forall x \in \mathcal{F}$

$$y^\top f''(x)y \geq \beta \|y\|^2 \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

dann ist f gleichmäßig konvex auf $\mathcal{F}$, d.h. $\exists \alpha > 0$, so dass

$$(1-t)f(x) + tf(y) \geq f((1-t)x + ty) + t(1-t)\alpha\|x-y\|^2$$

$\forall x, y \in \mathcal{F}$ und $\forall t \in [0,1]$.
Hinweis: Zeigen Sie erst, dass f genau dann gleichmäßig konvex ist, wenn mit einer Konstante $\alpha > 0$ gilt

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^\top (y-x) + \alpha\|y-x\|^2 \qquad \forall x, y \in \mathcal{F}.$$

Aufgabe 3
Sei $\tilde{x}$ ein Punkt der die notwendige Bedingung 1. Ordnung und die hinreichende Bedingung 2. Ordnung erfüllt. Dann gibt es in einer Umgebung von $\tilde{x}$ keine weiteren lokalen Minima.

Homepage der Veranstaltung ist:

`https://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_assmann_ss15.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Mo	10-12	WSC-S-U-4.02	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-S-U-3.02	
Ü	Di	10-12	WSC-S-U-4.01	Ute Aßmann