SS 2015
Prof. Arnd Rösch

Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik

Übung Numerik und Optimierung großer nichtlinearer Systeme

Blatt 6

Aufgabe 1
Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine genügend glatte Funktion. Wir betrachten die Standardeinbettung und die regularisierende Einbettung (Homotopie)

$$H^1(x,t) = F(x) - (1-t)F(x^0) \tag{1}$$
$$H^2(x,t) = (1-t)(x-x^0) + tF(x) \tag{2}$$

(a) Bestimmen Sie die Ableitungen $\partial_x H^1(x,t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\partial_x H^2(x,t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

(b) Zeigen Sie, dass es sich auch bei $H^2(x,t)$ um eine einbettende Gleichungsschar handelt.

(c) Wie lautet der Newton Schritt $x^k \to x^{k+1}$ für $H^2(x,t)$?

(d) Seien $\lambda_i(x)$, $i = 1,\dots,n$ die Eigenwerte von $F'(x)$. Bestimmen Sie die Eigenwerte $\mu_i(x,t)$ von $\partial_x H^1(x,t)$ bzw. von $\partial_x H^2(x,t)$ in Abhängigkeit von $\lambda_i(x)$.

(e) Zeigen Sie für $H^2(x,t)$: Zu jedem x gibt es ein $\bar{t} \in [0,1]$ derart, dass $\partial_x H^2(x,t)$ für $t \in [0,\bar{t}]$ regulär ist. Existiert andererseits ein reeller negativer Eigenwert $\lambda_i(x)$, so gibt es ein $\hat{t} \in (0,1)$ derart, dass $\mu_i(x,\hat{t}) = 0$, also $\partial_x H^2(x,\hat{t})$ singulär ist.

Aufgabe 2

(a) Zeigen Sie für die regularisierende Einbettung

$$H(x,t) := tF(x) + (1-t)(x-x^0),$$

dass selbst bei einfachen Beispielen der Fall auftreten kann, dass der Homotopie-Pfad nie sein Ziel $t = 1$ erreicht. Überprüfen Sie dieses Phänomen anhand des eindimensionalen Beispiels

$$F(x) := x^2 - 1 \text{ mit } x^0 := -2.$$

(Hinweis: Für $t \in (\frac{1}{3}(5-2\sqrt{3}), \frac{1}{3}(5+2\sqrt{3})) \approx (0.118, 0.651)$ besitzt die Gleichung $H(x,t) = 0$ keine Lösung!)

(b) Zeigen Sie weiter, dass für die Wahl $x^1 := \frac{1}{2}$ ein Homotopie-pfad existiert, der die Punkte $(\frac{1}{2}, 0)$ und $(1,1)$ verbindet.

Aufgabe 3
Benutzen Sie wieder die regularisierende Einbettung um anhand des folgenden eindimensionalen Beispiels

$$F(x) := x^3 - x \text{ mit } x^0 := 0$$

den Fall einer auftretenden Bikurkation zu untersuchen. Bestimmen Sie die Pfade, die sich in Abhängigkeit von t ergeben.

Homepage der Veranstaltung ist:

https://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_assmann_ss15.php

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Mo	10-12	WSC-S-U-4.02	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-S-U-3.02	
Ü	Di	10-12	WSC-S-U-4.01	Ute Aßmann