Übung Numerik und Optimierung großer nichtlinearer Systeme

Blatt 7

Aufgabe 1

Wir untersuchen ein einfaches Gradientenabstiegsverfahren mit konstanter Schrittweite zur Lösung des Problems $\min f(x)$. Für eine gegebene Lösung x^k wird die nächste Iterierte nach der Vorschrift $x^{k+1} = x^k - \sigma f(x^k)$ bestimmt. Dabei wird $\sigma > 0$ zu Beginn gewählt und dann unverändert gelassen.

1. Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \|x\|^{3/2}$. Zeigen Sie, dass es kein L gibt, das die Lipschitzbedingung $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|$ für alle x, $y \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Zeigen Sie weiterhin: Stoppt das Verfahren nicht nach endlich vielen Schritten im Minimum $x^* = 0$, dann konvergiert es nicht gegen x^* .

2. Sei f nun definiert als $f(x) = \|x\|^{2+\beta}$ mit $\beta > 0$. Geben Sie Bedingungen an, für welche Werte von σ und Startwerte x^0 das Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite σ konvergiert.

Aufgabe 2

Wählt man im allgemeinen Abstiegsverfahren zulässige Richtungen d^k, so liefert die Armijo-Schrittweitensuche alleine nicht immer zulässige Schrittweiten, wenn $\|d^k\|$ zu schnell gegen 0 geht. Zur Demonstration untersuchen wir die Suchrichtungen $d^k = -\frac{\nabla f(x^k)}{2^k}$ zur Minimierung einer stetig differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

1. Zeigen Sie, dass die d^k zulässige Suchrichtungen liefern.

2. Zeigen Sie am Beispiel $f(x) = \frac{x^2}{4}$, dass mit dem Startpunkt $x_0 > 0$ und mit der Wahl $\delta \leq \frac{3}{4}$ in der Armijo-Regel ausgehend von der Startschrittweite $\sigma = 1$ stets $\sigma_A = 1$ gewählt wird und diese Schrittweitenwahl unzulässig ist. Konvergiert der Algorithmus?

   Hinweis: Benutzen sie die Abschätzung $\lim\limits_{k\to\infty} \prod_{i=1}^{k+1} (1 - \frac{1}{2^{i+1}}) \geq a$, wobei $a > 0$ eine feste Zahl ist.

Aufgabe 3

Wählt man bei einem Abstiegsverfahren Abstiegsrichtungen, die nicht zulässig sind, da sie z. B. fast senkrecht zur Gradientenrichtung verlaufen, so kann es passieren, dass das Verfahren nicht gegen einen stationären Punkt konvergiert. Wir untersuchen dazu die Funktion $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\|x\|_2^2$ für die Suchrichtungen

$$d^k = (g^k)^\perp - \frac{1}{2^{k+3}} \nabla f(x^k),$$

wobei g^k so gewählt ist, dass $(g^k)^\perp \perp \nabla f(x^k)$ und $\|d^k\| = \|\nabla f(x^k)\|$. Zeigen Sie, dass das Abstiegsverfahren mit diesen Suchrichtungen und exakter Schrittweitenwahl für keinen Startpunkt $x^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegen den Minimalpunkt $\bar{x} = 0$ von f konvergiert.
Hinweis: Versuchen Sie den Abstand $\|x^k - x^0\|$ so abzuschätzen, dass $\|x^k\|$ nach unten nicht durch die 0 beschränkt ist.

Aufgabe 4
Gegeben sei eine Funktion $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ so, dass es ein $L > 0$ gibt mit

$$\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\| \qquad \text{für alle } x,\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Sei $0 < \varepsilon < \frac{1}{1+L}$. Für $\varepsilon \leq \sigma \leq \frac{1-\varepsilon}{L}$ betrachten wir das Gradientenverfahren mit konstanter Schrittweite $\sigma_k = \sigma$. Zeigen Sie:

1. Für die durch den Algorithmus erzeugte Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq \varepsilon^2 \|\nabla f(x^k)\|^2.$$

2. Das Verfahren bricht entweder mit einem stationären Punkt ab oder erzeugt eine unendliche Folge $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$, deren Häufungspunkte stationäre Punkte von f sind.

Homepage der Veranstaltung ist:

`https://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_assmann_ss15.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Mo	10-12	WSC-S-U-4.02	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-S-U-3.02	
Ü	Di	10-12	WSC-S-U-4.01	Ute Aßmann