Übung Numerik und Optimierung großer nichtlinearer Systeme

Blatt 8

Aufgabe 1
Wir betrachten das Trust-Region-Teilproblem

$$\min q(d) := f + g^\top d + \frac{1}{2} d^\top H d \quad \text{u.d.N. } \|d\| \leq r,$$

wobei $r > 0$, $f \in \mathbb{R}$, $g \in \mathbb{R}^n$ und die symmetrische Matrix $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben sind. Dann ist $d^* \in \mathbb{R}^n$ genau dann eine globale Lösung des Trust-Region-Teilproblems, wenn es ein (eindeutig bestimmtes) $\lambda^* \in \mathbb{R}$ gibt, so dass die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(a) $\lambda^* \geq 0,\ \|d^*\| \leq r,\ \lambda^*(\|d^*\| - r) = 0.$

(b) $(H + 2\lambda^* I)d^* = -g.$

(c) $H + 2\lambda^* I$ ist positiv semidefinit.

Hinweis: Benutzen Sie die folgende Aussage: Seien $y, z \in \mathbb{R}^n$ mit $z \neq 0$ gegeben. Besitzt das Ungleichungssystem

$$y^\top v < 0,\ z^\top v < 0$$

keine Lösung v, so existiert genau eine Zahl $\lambda \geq 0$ mit $y = -\lambda z$.

Aufgabe 2
Wir betrachten ein Beispiel für ein Trust-Region-Problem. Gegeben sei

$$\min_{\|d\| \leq \sqrt{2}} \frac{1}{2} d^T H d + b^T d \quad \text{mit } b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie die notwendigen und hinreichenden Optimalitätsbedingungen an.

(b) Berechnen Sie

$$d(\lambda) := -(H + \lambda I)^{-1} b, \quad \text{für } \lambda \geq \max\{0, -\lambda_{\min}(H)\}$$

und

$$\varphi(\lambda) := \|d(\lambda)\|_2.$$

(c) Bestimmen Sie die Optimallösung des Trust-Region-Problems.

Homepage der Veranstaltung ist:

`https://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_dima_ss15.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Mo	10-12	WSC-S-U-4.02	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-S-U-3.02	
Ü	Di	10-12	WSC-S-U-4.01	Ute Aßmann