WS 2019/20 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Nichtlineare Optimierung

Blatt 2

Aufgabe 1
Existenz von Lösungen
Das Standardargument, um die Existenz einer Lösung für ein Optimierungsproblem zu sichern, ist der Satz von Weierstraß. Gegeben seien Aufgaben $\min_{x\in\mathcal{F}} f(x)$ mit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

(i) $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{falls } x = 0 \\ x & \text{sonst} \end{cases}$, $\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R} : 0 \le x \le 1\}$;

(ii) $f(x) := x$, $\mathcal{F} := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$;

(iii) $f(x) := e^{-x}$, $\mathcal{F} = \mathbb{R}$;

Aufgabe 2 Untersuchen Sie das Problem

$$f(x,y) = x^2 + xy^2 + y^2 \to \min, \qquad x^2 + y^2 = 1$$

auf bedingte Extrema mittels
(i) Auflösung nach y, (ii) Auflösung nach x, (iii) Lagrangescher Multiplikatorenregel.

Aufgabe 3 Zeigen Sie, dass für jede stetige Funktion $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ mit $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$ und beliebiges $w \in \mathbb{R}^n$ die Niveaumenge $\mathcal{N}(f, f(w))$ kompakt ist.

Aufgabe 4 Sei $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie: H ist positiv definit genau dann, wenn es ein $\alpha > 0$ so gibt, dass gilt $x^T Hx \ge \alpha\|x\|_2^2$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5 Wir betrachten die Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y) := 12x^4 - 7x^2y + y^2$. Man zeige, dass f im Nullpunkt entlang jeder Geraden durch Null ein lokales Minimum besitzt. Besitzt auch f selbst in 0 ein lokales Minimum?

Aufgabe 6
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ eine Rechteckmatrix, $b \in \mathbb{R}^m$ und

$$f:\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2.$$

Berechnen Sie den Gradienten und die Hessematrix. Zeigen Sie, dass die Hesse-Matrix positiv semidefinit ist, und genau dann positiv definit ist, wenn A injektiv ist.

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv`$_r amazanova1819.php$

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	14-16	WSC-N-U-4.05	Arnd Rösch
	Do	14-16	WSC-N-U-4.05	
Üb	Mi	10-12	WSC-N-U-4.03	Aysel Ramazanova