

Nichtlineare Optimierung

Blatt 3

Aufgabe 1

Seien $C \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex und $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ konvex. Man zeige, dass für $x, y \in C$ und $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ mit $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$ gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) := \ln(1 + |x|)$ richtungsdifferenzierbar in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ in alle Richtungen $d \in \mathbb{R}$ ist. Wo hat f lokale Extremstellen?

Aufgabe 3

Seien $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit und $b \in \mathbb{R}^n$. Für $w \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die quadratischen Optimierungsprobleme

(a) $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(w, x) = \frac{1}{2}x^T Hx + b^T(x + w).$

(b) $\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(w, x) = \frac{1}{2}x^T Hx + (b + w)^T x.$

Wie hängen die Lösungen vom Parameter w ab?

Aufgabe 4

Wir betrachten noch einmal ein parametrisches Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x, p),$$

wobei $p \in \mathbb{R}$ ist und $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die spezielle Form

$$f(x, p) = g(x) + pb^T x$$

hat. Dabei ist $b \in \mathbb{R}^n$ und $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, deren Hessematrix $g''(x)$ für jedes x gleichmäßig positiv definit ist. Zeigen Sie, dass das Problem für jedes $p \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $x(p)$ hat und berechnen Sie die Ableitung der Abbildung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, p \mapsto x(p)$ (Tipp: Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen).

Aufgabe 5

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + b^T x + c, H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ spd., eine quadratische Funktion. Zeigen Sie, dass die Armijo-Bedingung

$$f(x + \alpha p) \leq f(x) + c\alpha \nabla f(x)^T p$$

die exakte Schrittweite $\alpha_E = -\frac{\nabla f(x)^T p}{p^T H p}$ ablehnt, wenn $c > 0.5$ gewählt wird.
Homepage der Veranstaltung ist:

http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/1v_ramazanova1819.php

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	14-16	WSC-N-U-4.05	Arnd Rösch
	Do	14-16	WSC-N-U-4.05	
Üb	Mi	10-12	WSC-N-U-4.03	Aysel Ramazanova