

## Nichtlineare Optimierung

Blatt 7

### Aufgabe 1

Beim BFGS-Verfahren seien als Schrittweiten die Powell- bzw. die exakte Schrittweite gewählt. Zeigen Sie, dass dann die Bedingung  $(y^{(k)})^\top s^{(k)} > 0$  erfüllt ist.

### Aufgabe 2

Wir betrachten wieder das quadratische Optimierungsproblem

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + b^T x + c \quad (1)$$

mit symmetrischer und positiv definiten Matrix  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Sei  $x^*$  das Minimum von  $f$ . Wir definieren die Energienorm als  $\|x\|_H := (x^T Hx)^{1/2}$ . Zeigen Sie:

- (a)  $\|\cdot\|_H$  ist tatsächlich eine Norm.
- (b) Es gilt  $f(x) = \frac{1}{2}\|x - x^*\|_H^2 + f(x^*)$  bzw.  $\|x - x^*\|_H^2 = 2(f(x) - f(x^*))$ .
- (c) Für  $E(x) := \frac{1}{2}\|x - x^*\|_H^2$  gilt:  $\nabla E(x) = \nabla f(x)$ .

### Aufgabe 3

Wir setzen die Untersuchung des Gradientenabstiegsverfahrens mit exakter Schrittweite für das quadratische Optimierungsproblem (1) fort.

Es sei  $E(x) := \frac{1}{2}\|x - x^*\|_H^2$  wie in Aufgabe 2.

- (a) Zeigen Sie, dass für die Iterierten gilt:

$$E(x^{k+1}) \leq \left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 E(x^k) = \left(\frac{\frac{M}{m}-1}{\frac{M}{m}+1}\right)^2 E(x^k), \quad (2)$$

wobei  $M$  bzw.  $m$  den größten bzw. kleinsten Eigenwert von  $H$  bezeichnen. Das Verhältnis  $\kappa = \frac{M}{m}$  ist die Konditionszahl der Matrix  $H$ .

**Hinweise:**

- Schreiben Sie  $E(x^k)$  in der Form  $\frac{1}{2}(g^k)^T H^{-1} g^k$ .
- Benutzen Sie die *Ungleichung von Kantorovich*:

$$\frac{\|x\|_2^4}{\|x\|_H^2 \|x\|_{H^{-1}}^2} \geq \frac{4Mm}{(M+m)^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

- (b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Ungleichung (2) eine Konstante  $C$  so, dass sich der Fehler  $\|x^{k+1} - x^*\|_2$  abschätzen lässt als

$$\|x^{k+1} - x^*\|_2 \leq C \|x^k - x^*\|_2.$$

Homepage der Veranstaltung ist:

[http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv\\_ramazanova1819.php](http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_ramazanova1819.php)

**Termine und Räume:**

		Zeit	Raum	
VL	Di	14-16	WSC-N-U-4.05	Arnd Rösch
	Do	14-16	WSC-N-U-4.05	
Üb	Mi	10-12	WSC-N-U-4.03	Aysel Ramazanova