SS 2019 Universität Duisburg-Essen
Prof. Arnd Rösch Fakultät für Mathematik

Übung Optimale Steuerung partieller Differentialgleichungen

Blatt 3

Aufgabe 1

(i) Beweisen Sie ein Analogon zur Hölderschen Ungleichung für drei Terme und Exponenten $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}=1$.

(ii) Es seien $u \in L^2(\Omega)$ und $v \in L^6(\Omega)$. In welchem $L^p(\Omega)$ liegt das punktweise Produkt uv?

Aufgabe 2
Beweisen Sie, dass durch

$$\|A\|_{\mathcal{L}(U,V)} = \sup_{\|u\|_U=1} \|Au\|_V$$

im Raum der linearen stetigen Operatoren von U nach V eine Norm definiert ist. Berechnen Sie die Norm des Integraloperators

$$A : C[0,1] \to C[0,1], \quad A(u)(t) = \int_0^1 e^{(t-s)} u(s) ds, \quad t \in [0,1].$$

Aufgabe 3
Weisen Sie nach, dass der Raum $C[a,b]$ versehen mit

$$\|f\|_{C_{L^2}[a,b]} := \left(\int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

ein linearer normierter Raum ist. Ist dieser Raum auch ein Banachraum?

Aufgabe 4
Beweisen Sie:

(i) Aus starker Konvergenz folgt schwache Konvergenz: $u_n \to u \;\Rightarrow\; u_n \rightharpoonup u$;

(ii) In einem Hilbertraum H ist die schwache Konvergenz $u_n \rightharpoonup u$ äquivalent zu

$$(v, u_n)_H \to (v, u)_H$$

für alle $v \in H$.

(iii) In einem Hilbertraum H gilt:

$$v_n \to v \text{ und } u_n \rightharpoonup u \quad \Rightarrow \quad (v_n, u_n)_H \to (v, u)_H$$

Aufgabe 5
Es sei
$$U_{ad} = \left\{u \in L^2(\Omega) : \ u_a \le u \le u_b \text{ f. ü. in } \Omega\right\}$$
mit $u_a, \ u_b \in L^2(\Omega)$ und $u_a \le u_b$. Zeigen Sie, dass U_{ad} eine konvexe und abgeschlossene Teilmenge von $L^2(\Omega$ ist. Ist U_{ad} in $L^2(\Omega)$ beschränkt? Hat U_{ad} innere Punkte?

Homepage der Veranstaltung ist:

`http://www.uni-due.de/mathematik/agroesch/lv_ramazanova1920.php`

Termine und Räume:

		Zeit	Raum	
VL	Di	10-12	WSC-N-U-4.03	Arnd Rösch
	Do	10-12	WSC-N-U-4.03	
Ü	Fr	10-12	WSC-N-U-4.03	Aysel Ramazanova